Concepte de stabilitate şi dichotomie polinomială în spaţii Banach

Rovana Boruga (Toma)

Rezumat

Cuvinte cheie: stabilitate polinomială, instabilitate polinomială, dichotomie polinomială, operatori de evoluţie.

Teoria clasică a comportărilor asimptotice de tip exponenţial, polinomial sau cu rate de creştere, precum stabilitate, instabilitate, dichotomie, trichotomie, splitting, a cunoscut o dezvoltare impresionantă de-a lungul timpului.

În teoria stabilităţii ecuaţiilor diferenţiale există câteva teoreme remarcabile care stau la baza dezvoltării acestui domeniu. Printre ele, amintim rezultatele obţinute de E. A. Barbashin ([7]), R. Datko ([45]), A.M. Lyapunov ([69]), A. Pazy ([101]), O. Perron ([104]), S. Rolewicz ([115]), rezultate care au avut o contribuţie semnificativă la dezvoltarea diverselor direcţii de studiu ale comportărilor asimptotice.

Scopul prezentei teze este acela de a obţine teoreme de caracterizare pentru conceptele de stabilitate, instabilitate şi dichotomie polinomială pentru operatori de evoluţie în spaţii Banach, atât în cazul uniform cât şi în cazul neuniform. De asemenea, se trec în revistă conceptele exponenţiale şi se fac completări la rezultatele deja cunoscute în literatură pentru acest tip de comportament. De asemenea, se pune accent şi pe stabilirea implicaţiilor între toate noţiunile care apar pe parcursul studiului.

Lucrarea este formată din patru capitole, precedate de o introducere în tematica aleasă şi urmate de lista referinţelor bibliografice folosite pe parcursul redactării tezei. Fiecare capitol se încheie cu o secţiune de comentarii bibliografice în cadrul căreia se menţionează rezultatele originale ale capitolului respectiv precum şi conferinţele în cadrul cărora au fost comunicate rezultatele obţinute.

Primul capitol, intitulat **Concepte de creştere şi descreştere pentru operatori de evoluţie**, este format din patru paragrafe. Primele două paragrafe prezintă noţiunile de creştere (descreştere) polinomială, respectiv creştere (descreştere) exponenţială atât în caz uniform cât şi neuniform pentru operatori de evoluţie şi stabileşte legăturile între aceste concepte printr-o serie de contraexemple. În al treilea paragraf, se generalizează conceptele prezentate în paragrafele anterioare. Astfel, se abordează cazul general al perechilor de forma (U, P) şi se prezintă implicaţiile între noţiuni, justificate prin exemple.

Rezultatele originale ale acestui prim capitol sunt concretizate în lucrările [21], [25], [26], [32], [72] şi sunt reprezentate de Remarca 1.4.9, Exemplele 1.3.7, 1.4.1, 1.4.2, 1.4.3, 1.4.5, 1.4.7 şi Propoziţiile 1.2.2, 1.2.3, 1.3.2, 1.4.2, 1.4.3, 1.4.4 .

Al doilea capitol, denumit **Concepte de stabilitate pentru operatori de evoluţie** cuprinde patru paragrafe. Primul paragraf abordează stabilitatea exponenţială şi stabilitatea polinomială în cazul uniform. Al doilea paragraf tratează cazul neuniform, iar penultimul paragraf prezintă conexiunile între conceptele de creştere amintite în primul capitol şi conceptele de stabilitate din acest capitol. În ceea ce priveşte comportamentul exponenţial, sunt amintite pe de-o parte principalele rezultate obţinute în literatură, iar pe de altă parte se obţin noi variante ale unor teoreme ce caracterizează acest concept. Referitor la cazul polinomial, se obţin teoreme de caracterizare de tip Barbashin, Datko, Hai, Lyapunov şi se discută despre stabilitatea polinomială neuniformă a unui operator de evoluţie atât în norma iniţială, cât şi în raport cu o normă echivalentă cu norma iniţială.

Rezultatele originale se regăsesc în Teoremele 2.1.1, 2.1.3, 2.1.4, 2.1.5, 2.1.10, 2.1.11, 2.1.12, 2.1.13, 2.1.14, 2.1.18, 2.2.4, 2.2.5, 2.2.5, 2.2.6, 2.2.7, 2.2.8, 2.2.9, Propoziţiile 2.1.1, 2.1.2, Remarcile 2.1.8, 2.1.9, 2.1.10, 2.2.6, respectiv Exemplele 2.2.1, 2.2.2, 2.3.1 şi sunt publicate în lucrările [23], [26], [27], [28], [31].

Capitolul al treilea, **Concepte de instabilitate pentru operatori de evoluţie** este format din patru paragrafe. Primul paragraf prezintă mai întâi rezultatele cunoscute pentru cazul exponenţial, obţinându-se noi variante ale unor teoreme de tip Datko şi Lyapunov. Apoi, folosind tehnici similare, se trece la cazul polinomial uniform. Astfel, se prezintă caracterizări ale conceptului de instabilitate polinomială uniformă de tip criteriu logaritmic, criteriu de majorare, criterii de tip Datko, Hai şi Lyapunov. Instabilitatea neuniformă din al doilea paragraf este prezentată în acelaşi mod ca şi stabilitatea neuniformă din capitolul anterior, iar al treilea paragraf prezintă conexiunile între conceptele de descreştere şi conceptele de instabilitate.

Rezultatele originale sunt reprezentate de Teoremele 3.1.1, 3.1.4, 3.1.5, 3.1.8, 3.1.10, 3.1.11, 3.1.12, 3.1.14, respectiv, Remarcile 3.1.7, 3.1.8, Propoziţiile 3.1.1, 3.1.2 şi Exemplul 3.3.8, fiind publicate în lucrările [22], [25], [28], [30] şi [72].

Ultimul capitol, intitulat **Concepte de dichotomie pentru operatori de evoluţie** conţine cele mai generale rezultate ale tezei, având ca şi element central noţiunea de dichotomie. Primul paragraf abordează mai întâi cazul dichotomiei exponenţiale uniforme şi prezintă variante noi ale unor rezultate clasice din literatură. Apoi, trecerea la cazul polinomial se face la fel ca şi în cazul stabilităţii şi al instabilităţii prin introducerea unor operatori de evoluţie asociaţi şi a familiilor de proiectori corespunzătoare acestora. Similar cazului exponenţial, obţinem caracterizări de tip Datko, Hai, Lyapunov, precum şi criterii de tip logaritmic şi de majorare pentru dichotomia polinomială uniformă. Al doilea paragraf are ca temă centrală dichotomia neuniformă, prezentată atât din punct de vedere exponenţial, cât şi polinomial în raport cu familii de proiectori invariante, tare invariante, precum şi în raport cu familii de norme de tip Lyapunov. Al treilea paragraf stabileşte conexiunile între conceptele de dichotomie şi cele de creştere pentru perechile de forma (U, P) prezentate în primul capitol.

Rezultatele originale ale acestui ultim capitol sunt reprezentate de Teoremele 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3, 4.1.4, 4.1.5, 4.1.6, 4.1.7, 4.1.8, 4.1.9, 4.1.10, 4.1.11, 4.1.12, 4.1.13, 4.1.14, 4.1.15, 4.2.2, 4.2.3, 4.2.4, 4.2.5, 4.2.6, 4.2.7, Lema 4.1.1, Propoziţiile 4.1.1, 4.1.2, Corolarele 4.1.1, 4.1.2, 4.1.4, respectiv Exemplele 4.3.1, 4.3.9 şi au fost publicate în lucrările [20], [23], [24], [32], [33], [73].

Cuprins

Concepts of polynomial stability and polynomial dichotomy in Banach spaces

Rovana Boruga (Toma)

Abstract

Keywords: polynomial stability, polynomial instability, polynomial dichotomy, evolution operators.

The classical theory of asymptotic behaviors of exponential, polynomial or with growth rates type such as stability, instability, dichotomy, trichotomy, splitting, has witnessed an impressive development over the years.

In the stability theory of differential equations there are some remarkable theorems which contributed to the development of this area. Among them, we mention the results obtained by E. A. Barbashin ([7]), R. Datko ([45]), A.M. Lyapunov ([69]), A. Pazy ([101]), O. Perron ([104]), S. Rolewicz ([115]), results that had a significant intake on developing the various directions of study of asymptotic behaviors.

The aim of the present thesis is to obtain characterizations for the concepts of polynomial stability, instability and dichotomy for evolution operators in Banach spaces, in both uniform and nonuniform cases. More precisely, on one hand we mention the results that are already known in the literature for the exponential concepts and on the other side, we give some new results. Also, we focus on establishing the implications between all the notions that we present during our study.

The thesis is structured into four chapters, preceded by an introduction and followed by the list of references. Each chapter ends with a bibliographic comments section, where we mention the original results of the chapter and the conferences where they were communicated.

The first chapter, entitled **Growth and decay concepts for evolution operators**, consists of four paragraphs. The first two paragraphs present the polynomial growth (decay), respectively the exponential growth (decay) for the uniform case, as well as for the nonuniform case for evolution operators and establish the connections between these concepts through some counterexamples. The third paragraph generalizes the notions presented in the previous sections. More precisely, we approach the general case of (U, P) pairs and we present the implications between notions, through examples.

The original results of this chapter are publihed in the papers [21], [25], [26], [32], [72] and they are represented by Remark 1.4.9, Examples 1.3.7, 1.4.1, 1.4.2, 1.4.3, 1.4.5, 1.4.7 and Propositions 1.2.2, 1.2.3, 1.3.2, 1.4.2, 1.4.3, 1.4.4 .

The second chapter, entitled **Stability concepts for evolution operators**, contains four paragraphs. The first one deals with the concepts of uniform exponential stability and uniform polynomial stability. The second section approaches the nonuniform case and in the next paragraph we present the connections between these concepts and the growth notions discussed in the first chapter. If we refer to the exponential behavior, on one side we recall the main results obtained in the literature for this concept and on the other side we obtain new variants of some theorems that characterize this notion. If we refer to the polynomial case, we give characterizations of Barbashin, Datko, Hai and Lyapunov type. We also approach the nonuniform polynomial stability of an evolution operator with respect to a norm that is equivalent to the initial norm.

The original results of this chapter are represented by Theorems 2.1.1, 2.1.3, 2.1.4, 2.1.5, 2.1.10, 2.1.11, 2.1.12, 2.1.13, 2.1.14, 2.1.18, 2.2.4, 2.2.5, 2.2.5, 2.2.6, 2.2.7, 2.2.8, 2.2.9, Propositions 2.1.1, 2.1.2, Remarks 2.1.8, 2.1.9, 2.1.10, 2.2.6, respectively Examples 2.2.1, 2.2.2, 2.3.1 and they are published in the papers [23], [26], [27], [28], [31].

The third chapter, **Instability concepts for evolution operators** is structured in four paragraphs. As in the previous chapter, the first paragraph presents the already known results in the exponential case and some new variants of characterizations of Datko and Lyapunov type. Then, using similar techniques, we approach the polynomial case. Thus, we obtain a logarithmic criterion, a majorization criterion and some criteria of Datko, Hai and Lyapunov type. The second paragraph presents the nonuniform instability in a similar manner as the nonuniform stability from the previous chapter. The connections between these concepts and the decay notions are illustrated in the next paragraph.

The original results of this chapter are represented by Theorems 3.1.1, 3.1.4, 3.1.5, 3.1.8, 3.1.10, 3.1.11, 3.1.12, 3.1.14, Remarks 3.1.7, 3.1.8, Propositions 3.1.1, 3.1.2 and Example 3.3.8, published in [22], [25], [28], [30] and [72].

The last chapter, entitled **Dichotomy concepts for evolution operators**, contains the most general results of the thesis and has the dichotomy notion as its central element. The first paragraph deals with the case of uniform exponential dichotomy and presents new variants of some classical results from the literature. Then, the uniform polynomial case is approached by introducing two associated evolution operators and their families of projections. Similar to the exponential case, we obtain characteriztions of Datko, Hai and Lyapunov type, as well as a logarithmic and a majorization criteria for the uniform polynomial dichotomy. The second section focuses on the nonuniform dichotomy which is presented from both perspectives: exponential and polynomial with respect to invarinat, strongly invariant and Lyapunov type families of norms. The next paragraph establishes the connections between the dichotomy concepts and the growth notions for the pairs (U, P), presented in the first chapter.

The original results of this chapter are represented by Theorems 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3, 4.1.4, 4.1.5, 4.1.6, 4.1.7, 4.1.8, 4.1.9, 4.1.10, 4.1.11, 4.1.12, 4.1.13, 4.1.14, 4.1.15, 4.2.2, 4.2.3, 4.2.4, 4.2.5, 4.2.6, 4.2.7, Lemma 4.1.1, Propositions 4.1.1, 4.1.2, Corollaries 4.1.1, 4.1.2, 4.1.4, respectively Examples 4.3.1, 4.3.9 and they were published in [20], [23], [24], [32], [33], [73].

Contents