

UNIVERSITATEA DE VEST DIN TIMIȘOARA  
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ  
ȘCOALA DOCTORALĂ DE MATEMATICĂ



REZUMAT  
TEZĂ DE DOCTORAT

**CONDUCĂTOR ȘTIINȚIFIC:**  
Prof. Univ. Emerit. Mihail MEGAN

**DOCTORAND:**  
Mădălina Sofia PAȘCA

TIMIȘOARA  
2022

UNIVERSITATEA DE VEST DIN TIMIȘOARA  
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ  
ȘCOALA DOCTORALĂ DE MATEMATICĂ



Metode de aproximare polinomială  
în sensul celor mai mici pătrate  
pentru ecuații cu derivate  
fracționare

**CONDUCĂTOR ȘTIINȚIFIC:**  
Prof. Univ. Emerit. Mihail MEGAN

**DOCTORAND:**  
Mădălina Sofia PAȘCA

TIMIȘOARA  
2022

## **Componenta Comisiei de susținere publică a tezei de doctorat**

1. **Președinte: Prof. Dr. Habil. Adina Lumița SASU**  
Universitatea de Vest din Timișoara
2. **Conducător științific: Prof. Univ. Emerit. Mihail MEGAN**  
Universitatea de Vest din Timișoara
3. **Referenți: Prof. Dr. Habil. Aurelian CERNEA**  
Universitatea din București  
**Prof. Dr. Habil. Rodica LUCA TUDORACHE**  
Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iași  
**Prof. Dr. Habil. Eva KASLIK**  
Universitatea de Vest din Timișoara

## Activitatea științifică desfășurată pe parcursul stagiului de studii universitare de doctorat

### I.a. Lucrari publicate în jurnale indexate ISI - clasificate Web of Science

1. **M.S.Paşca**, O.Bundău, A.Juraton, B.Căruntu: *The Least Squares Homotopy Perturbation Method for Systems of Differential Equations with Application to a Blood Flow Model*, Mathematics (10/2) 2022, pag. 546-560, DOI:10.3390/math10040546, Q1
2. B.Căruntu, **M.S.Paşca**: *Approximate Solutions for a Class of Nonlinear Fredholm and Volterra Integro-Differential Equations Using the Polynomial Least Squares Method*, Mathematics (9/21) 2021, pag. 2692-2705, DOI:10.3390/math9212692, Q1
3. B.Căruntu, **M.S.Paşca**: *The Polynomial Least Squares Method for nonlinear fractional Volterra and Fredholm integro-differential equations*, Mathematics, (9/18) 2021, pag 2324- 2341, DOI:10.3390/math9182324, Q1
4. C.Bota, B.Căruntu, D.Țucu, M.Lăpădat, **M.S.Paşca**: *A Least Squares Differential Quadrature Method for a Class of Nonlinear Partial Differential Equations of Fractional Order*, Mathematics 2020, Volume 8, Issue 8, pag. 1336- 1348, DOI:10.3390/math8081336, Q1
5. C.Bota, B.Căruntu, **M.S.Paşca**, D.Țucu, M.Lăpădat: *Least Squares Differential Quadrature Method for the generalized Bagley-Torvik fractional differential equation*, Mathematical Problems in Engineering 2020, Volume 2020, 7 pag., DOI:10.1155/2020/4806387, Q4
6. B.Căruntu, C.Bota, M.Lăpădat, **M.S.Paşca**: *Polynomial Least Squares Method for Fractional Lane - Emden Equations*, Symmetry 2019, Volume 11(4), pag. 479-485, DOI:10.3390/sym11040479, Q2
7. C.Bota, B.Căruntu, **M.S.Paşca**, M. Lăpădat: *Optimal control based on Polynomial Least Squares Method*, Mathematical Problems in Engineering 2018, Volume 2018, 8 pag., DOI:10.1155/2018/9454160, Q4

### I.b. Lucrări publicate în volume ale unor conferințe internaționale clasificate Web of Science

8. M.Lăpădat, **M.S.Paşca**: *Polynomial Least Squares Method for approximate solutions of fractional boundary value problems*, International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics, AIP Conference Proceedings 2293, 350005 (2020), 4 pag, DOI:10.1063/5.0031664.
9. A.Albu, L.Stanciu, **M.S.Paşca**, C.Zimbru: *Choosing Between Artificial Neural Networks and Bayesian Inference in Stroke Risk Prediction*, IEEE International Conference on E-Health and Bioengineering, IEEE345 E 47TH ST, NEW YORK, NY 10017 USA, 4 pag., DOI:10.1109/EHB47216.2019.8970035.

10. A.Albu, **M.S.Paşca** , C.Zimbru: *Medical Predictions: Bayes Theorem vs Artificial Neural Networks*, SACI 2019 IEEE 13th International Symposium on Applied Computational Intelligence and Informatics, 4 pag, DOI:10.1109/SACI46893.2019.9111510
11. M.Lăpădat, **M.S.Paşca**: *Approximate solutions of the nonlinear standard Lane-Emden equation using Least Squares Differential Quadrature Method*, AIP Conference Proceedings 2116, 370003 (2019),DOI:10.1063/1.5114376 .

## II. Articole publicate în jurnale indexate BDI

1. B.Căruntu, C.Bota, **M.S.Paşca**, M.Lăpădat: *Approximate solutions for Riccati differential equation of fractional order using the Least Squares Differential Quadrature Method*, Scientific Buletin of The Politehnica University of Timisoara, Transactions on Mathematics and Physics, Volume 64(78), Issue 2, 2019, pag 18-28.
2. **M.S.Paşca**, M. Lăpădat: *Approximate solutions by the least squares differential quadrature method for nonlinear heat transfer problems*, Scientific Buletin of The Politehnica University of Timisoara, Transactions on Mathematics and Physics, Volume 64(78), Issue 1, 2019, pag 4-13.
3. **M.S.Paşca**, M.Lăpădat: *PLSM for Bagley-Torvik Equation modeling the deformation resistance characteristics of the polymer concrete*, Scientific Buletin of The Politehnica University of Timisoara, Transactions on Mathematics and Physics, Volume 64(78), Issue 1, 2019, pag 29-35.
4. **M.S.Paşca**, M.Lăpădat: *Solving Fractional ordinary differential equation using PLSM*, Scientific Buletin of The Politehnica University of Timisoara, Transactions on Mathematics and Physics, Volume 63(77), Issue 1, 2018, pag 41-48.

## III. Articole acceptate spre publicare în jurnale indexate BDI

1. **M.S.Paşca**: *Piecewise Polynomial Least Squares Method for differential equations of fractional order*, Annals of West University of Timisoara Mathematics and Computer Science
2. **M.S.Paşca**: *Piecewise Polynomial Least Squares Method for nonlinear heat transfer problems*, Scientific Buletin of The Politehnica University of Timisoara.

## IV. Lucrări publicate în volume ale unor conferințe internaționale

1. **M.S.Paşca**, B.Căruntu, A.Albu: *A method for determining the analytical solution for Bagley Torvik equations with fractional derivatives*, 16 th International Symposium on Applied Computational Intelligence and Informatics - SACI 2022 Timișoara, Romania, May 25-28 2022, DOI: 10.1109/SACI55618.2022.9919569
2. **M.S.Paşca**, B.Căruntu , A.Juratoni, O.Bundău , A.Albu: *Least Squares Differential Quadrature Method for Systems of Fractional Order Differential Equations*, The 9th IEEE International Conference on E-Health and Bioengineering -EHB 2021 Grigore T. Popa University of Medicine and Pharmacy, Iasi, Romania, 18-19 Nov. 2021, DOI:10.1109/EHB52898.2021.9657626

3. **M.S.Paşca**, M.Razzaghi, M.Lăpădat: *Approximate solutions for the Bagley-Torvik fractional equation with boundary conditions using the Polynomial Least Squares Method*, ITM Web of Conferences 29, 01011 (2019), DOI:10.1051/itmconf/20192901011
4. M.Lăpădat, M.Razzaghi, **M.S.Paşca**: *Numerical solution of the first order nonlinear differential equations with the mixed nonlinear conditions by using PLSM (comparison with Bernstein polynomials method)*, ITM Web of Conferences 29, 01014 (2019), DOI:10.1051/itmconf/20192901014
5. B.Căruntu, C.Bota, **M.S.Paşca**: *Approximate solutions for the magnetohydrodynamic flow of a non-Newtonian nanofluid in a coaxial porous cylinder using the Least Squares Differential Quadrature Method*, ICMA 2018, Timiosara, Romania, November 1-3 2018, ICMA 2018 - The 15th International Conference on Mathematics and its Application, ISSN 1224 - 6069, pp54-63.
6. **M.S.Paşca**, M.Lăpădat: *Optimal control problems based on Least Squares Differential Quadrature Method*, ICMA 2018, Timiosara, Romania, November 1-3 2018, ICMA 2018 - The 15th International Conference on Mathematics and its Application, ISSN 1224 - 6069, pp137-144.

## V. Comunicări la conferințe

1. **M.S.Paşca**, B.Căruntu, A.Juratoni, O.Bundău, F. Pater: *Piecewise Polynomial Least Squares Method for optimal control problem*, ICNAAM 2022 Conference, Crete, Greece, 19-25.Sept.2022.
2. **M.S.Paşca**: *The Piecewise Polynomial Least Squares Method used in determining the approximate solutions for Riccati differential equations of fractional order*, Fourth Romanian Itinerant Seminar on Mathematical Analysis and its Applications - RISMAA 2022, Braşov, Romania, May 19-21 2022
3. **M.S.Paşca**: *Analytical approximate solution for the first order nonlinear differential equations using Piecewise Polynomial Least Squares Method*, The Second International Conference on Computational Methods and Applications in Engineering - ICCMAE 2022, Mississippi, USA, May 7-8 2022

## VI. Culegere de probleme

1. A.Juratoni, O.Bundău, **M.S.Paşca** - *Analiza Matematică: Şiruri şi Serii*, Editura Eurobit, 2021, ISBN 978-973-132-782-2, 128 pagini.

## VII. Indicatori de performanță științifică la 01.11.2022:

Review-uri existente:

- Zentralblatt MATH: Zbl 1459.65132, Zbl 1425.34009, Zbl 1427.49030.
- Mathematical Reviews: MR4127043, MR3875795.

Indice Hirsch și număr de citări conform bazelor de date:

- Web of Science: H 2, citări 15

<https://www-webofscience-com.am.e-nformation.ro/wos/author/record/29053237>

- Scopus: H 2, citări 25:  
<https://www-scopus-com.am.e-nformation.ro/authid/detail.uri?authorId=57207349590>
- Google Scholar: H 3, citări 37:  
<https://scholar.google.com/citations?user=xQ80LEYAAAAJhl=enoi=ao>

# Cuprins

Activitatea științifică desfășurată pe parcursul stagiului de studii universitare de doctorat . . . . .	4
<b>1 Introducere</b>	<b>10</b>
Rezumatul tezei de doctorat . . . . .	10
Structura lucrării . . . . .	10
Rezultate originale . . . . .	12
<b>2 Metoda de aproximare polinomială în sensul celor mai mici pătrate</b>	<b>14</b>
2.1 Descrierea metodei (MAPMP) . . . . .	14
Estimarea erorii . . . . .	16
2.2 MAPMP pentru ecuații de tip Bagley-Torvik . . . . .	16
2.3 MAPMP pentru ecuații de tip Lane Emden . . . . .	20
2.4 MAPMP pentru Probleme de control optimal . . . . .	22
2.5 MAPMP pentru ecuații integro-diferențiale neliniare de tip Fredholm Volterra . . . . .	24
2.6 Comentarii bibliografice . . . . .	27
<b>3 Metoda de aproximare polinomială în sensul celor mai mici pătrate aplicată pe diviziuni ale domeniului de definiție</b>	<b>28</b>
3.1 Descrierea metodei (MAPMPDI) . . . . .	28
Algoritmul metodei MAPMPDI . . . . .	29
Estimarea erorii . . . . .	30
3.2 MAPMPDI pentru ecuații Bagley-Torvik generalizate de ordin fracționar	30
3.3 MAPMPDI pentru o clasă de ecuații neliniare, cu derivate parțiale de ordin fracționar . . . . .	31
3.4 Soluții aproximative pentru fluxul magnetohidrodinamic al unui nanofluid non-Newtonian într-un cilindru poros coaxial folosind MAPMPDI	35
3.4.1 Modelul matematic ce descrie curgerea unui nanofluid non-Newtonian . . . . .	36
3.4.2 Rezultate numerice . . . . .	38
3.5 MAPMPDI pentru sisteme de ecuații diferențiale . . . . .	39
3.5.1 Descrierea metodei . . . . .	40
3.6 MAPMPDI pentru probleme neliniare cu transfer de căldură . . . . .	44
3.7 MAPMPDI pentru ecuații diferențiale Riccati de ordin fracționar . . . . .	47
3.8 Comentarii bibliografice . . . . .	48



<b>4</b>	<b>Metoda perturbațiilor omotopice în sensul celor mai mici pătrate</b>	<b>49</b>
4.1	Descrierea metodei perturbațiilor omotopice în sensul celor mai mici pătrate - (MPOMP)	50
4.2	Exemplu - flux sanguin	52
4.3	Comentarii bibliografice	55
<b>5</b>	<b>Metoda de aproximare polinomială în sensul celor mai mici pătrate pe subintervale (MAPMPS)</b>	<b>56</b>
5.1	MAPMPS pentru ecuații de tip Bagley-Torvik	56
5.1.1	Descrierea metodei MAPMPS	57
5.1.2	Exemplu numeric	58
5.2	MAPMPS pentru ecuații de tip Riccati	61
5.3	Comentarii	63
	Concluzii	64
	Cuvinte cheie	65

# Capitolul 1

## Introducere

### Structura lucrării

În teza de doctorat *Metode de aproximare polinomială în sensul celor mai mici pătrate pentru ecuații cu derivate fracționare* sunt prezentate diverse metode de determinare a soluțiilor analitice aproximative pentru mai multe tipuri de ecuații cu derivate fracționare. Fiecare din aceste ecuații au aplicabilitate în diverse domenii ale științei. În cei patru ani de stagiu doctoral am determinat soluții analitice aproximative de tip polinomial pentru ecuații cu derivate fracționare dintre care amintesc ecuații de tip Bagley-Torvik, Lane Emden, Fredholm, Volterra.

Ca definiție a derivatei fracționare în această lucrare este folosită definiția Caputo astfel că se numește **derivata de ordin  $\alpha$  fracționar, în sens Caputo** a funcției  $y : [a, b] \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  absolut continuă:

$$D^\alpha y(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \int_0^x (x-\zeta)^{n-\alpha-1} \cdot y^{(n)}(\zeta) d\zeta, & n-1 < \alpha < n, \\ \frac{d^n y(x)}{d\zeta^n}, & \alpha = n \end{cases} \quad (1.1)$$

unde  $n \in \mathbb{N}^*$  și  $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, x \in [a, b] \subset \mathbb{R}_+$ .

Fiecare din capitolele tezei prezintă câte o metoda de obținere a soluției analitice aproximative și aplicațiile numerice studiate.

Lucrarea este structurată astfel: cinci Capitole și Concluzii.

- Capitolul I - Introducerea - în care sunt definite noțiunile utilizate în capitolele lucrării și tipurile de ecuații pentru care se găsesc soluții analitice aproximative utilizând metodele descrise în cele patru capitole ale lucrării.
- Capitolul II - Începe cu descrierea Metodei de aproximare polinomială în sensul celor mai mici pătrate (MAPMP) așa cum a fost ea introdusă în anul 2012 de Profesorii C. Bota și B Căruntu în lucrarea  *$\varepsilon$ -Approximate polynomial solutions for the multi-pantograph equation with variable coefficients*, din Applied Mathematics and Computation, 2012, 219 (4), pp.1785-1792.

În continuare capitolul conține **rezultatele originale** obținute aplicând metoda MAPMP pentru diverse tipuri de ecuații cu derivate fracționare, ecuații cu aplicabilitate în multe ramuri ale ingineriei. Este astfel arătată utilitatea metodei. Mare parte din aceste rezultate au fost publicate în ultimii trei ani în jurnale internaționale de specialitate și se regăsesc deja citate în publicații menționate la începutul acestei teze.

- Capitolul III - Conține descrierea metodei de aproximare polinomială în sensul celor mai mici pătrate aplicată pe diviziuni ale domeniului de definiție (MAPMPDI), metoda elaborată de Prof. Bota și Căruntu și prezentată în cadrul conferinței The 15th International Conference on Mathematics and its applications ICMA 2018 - International Conference on mathematics and its applications, în lucrarea *Approximate solutions for the magnetohydrodynamic flow of a non-Newtonian nanofluid in a coaxial porous cylinder using the Least Squares Differential Quadrature Method*.

În continuarea capitolului sunt prezentate aplicații ale metodei MAPMPDI pentru determinarea soluțiilor analitice aproximative pentru diverse tipuri de ecuații. Toate aceste rezultate constituind **contribuții originale** au fost comunicate în cadrul unor conferințe internaționale sau publicate în jurnale de specialitate.

- Capitolul IV - Debutează cu o prezentare succintă metodei de determinare a soluțiilor aproximative- Homotopy Perturbation Method- introdusă de He în 1999. În cadrul aceluiași capitol se prezintă Metoda perturbațiilor omotopice în sensul celor mai mici pătrate (MPOMP) elaborată de aceiași profesori Bota și Căruntu în 2017 și publicată în lucrarea *Approximate analytical solutions of nonlinear differential equations using the Least Squares Homotopy Perturbation Method* în Journal of mathematical analysis and applications, 2017, 448(1), pp.401-408.

În continuarea descrierii metodei, în teză se prezintă și modul său de aplicare asupra ecuațiilor care modelează un flux magnetohidrodinamic laminar al unui fluid vâscos non-newtonian într-un canal semiporos sub influența unui câmp magnetic static coaxial uniform. **Rezultatele originale** astfel obținute au fost publicate la începutul anului 2022 într-un jurnal matematic de top.

- Capitolul V - Include prezentarea unei **metode originale** dezvoltată de autoare în ultimile luni ale stagiului doctoral, metodă numită: **Metoda de aproximare polinomială în sensul celor mai mici pătrate pe subintervale (MAPMPS)**.

De asemenea, în acest ultim capitol sunt incluse și rezultatele obținute aplicând această nouă metodă în rezolvarea unor ecuații diferențiale fracționare.

Aceste rezultate au fost prezentate în cadrul unor conferințe desfășurate recent:

- International Conference on Computational Methods and Applications in Engineering - ICCMAE 2022, Mississippi, USA, May 7-8 2022;

- The Fourth Romanian Itinerant Seminar on Mathematical Analysis and its Applications - RISMAA 2022, Brașov, Romania, May 19-21 2022;

- 16 th International Symposium on Applied Computational Intelligence and Informatics - SACI 2022 Timișoara, Romania, May 25-28 2022.

Modul facil de determinare al soluțiilor analitice obținute prin aplicarea noii metode promite elaborarea unui algoritm ce poate în timp să prezinte interes în domeniu. Se definitivează aspecte legate de numărul optim de subintervale necesar în vederea obținerii soluției cu ”restul cel mai mic” în cel mai scurt timp, cu un consum minim de resurse. Cercetarea continuă în acest sens, urmând ca noile rezultate ce se vor obține să fie comunicate în întruniri științifice viitoare și/sau să fie trimise de autoare spre publicare în jurnale de specialitate.

- Concluzii - Partea finală a lucrării cuprinde câteva direcții de continuare a cercetării, posibile idei de dezvoltare a metodei MAPMPS și a altor metode pentru determinarea soluțiilor analitice aproximative pentru diverse ecuații sau sisteme de ecuații cu derivate fracționare.

## Rezultate originale

**Rezultatele originale** cuprind următoarele:

- în **Capitolul al doilea** - Teoremele 2.1.1 și 2.1.2 alături de determinarea soluțiilor analitice aproximative utilizând metoda de aproximare polinomială în sensul celor mai mici pătrate (metoda MAPMP) pentru ecuații:

- de tip **Bagley-Torvik** cu condiții la frontieră ecuația de forma:

$$y''(x) + A(x)y'(x) + B(x)D^\alpha y(x) + C(x)y(x) = f(x), x \in [a, b], \quad (1.2)$$

$$y(a) = \mu_1, y(b) = \mu_2.$$

în care  $y$  este o funcție absolut continuă pe intervalul  $[a, b]$ ,  $A, B, C$ , și  $f$  funcții reale continue pe intervalul  $[a, b]$  iar  $D^\alpha y$  - derivata fracționară de ordin  $\alpha$  în sens Caputo a funcției  $y$  cu  $n - 1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}^*$ ;

-**Lane-Emden** de forma:

$$D^\alpha y(x) + \frac{k}{x} \cdot D^\beta y(x) + f(x, y(x)) = g(x), \quad x \in [a, b], \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad 0 < \beta \leq 1 \quad (1.3)$$

cu condițiile la frontieră:

$$y(a) = \mu, \quad y'(b) = \nu \quad (1.4)$$

unde  $k, \mu$  și  $\nu$  sunt constante reale,  $f$  și  $g$  funcții reale continue pe  $[a, b]$ ,  $y$  o funcție absolut continuă pe intervalul  $[a, b]$ , iar  $D^\alpha y$  și  $D^\beta y$  - derivate fracționare de ordin  $\alpha$  respectiv  $\beta$  în sens Caputo a funcției  $y$  cu  $n - 1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}^*$ ;

- **Fredholm-Volterra** de forma:

$$D^\alpha y(x) = \mathcal{F} \left( x, y(x), \int_0^1 K_f(x, s, y(s)) ds, \int_0^x K_v(x, s, y(s)) ds \right), x \in [0, 1] \quad (1.5)$$

pentru care sunt verificate condițiile:

$$\sum_{j=0}^{r-1} [\alpha_{ij} \cdot u^{(j)}(0) + \beta_{ij} \cdot u^{(j)}(1)] = \mu_i, \quad i = 0, \dots, r-1, \quad r \in \mathbb{N}^*. \quad (1.6)$$

unde  $K_f, K_v, \mathcal{F}$  și  $y$  sunt funcții absolut continue pe intervalul  $[0, 1]$ , iar  $D^\alpha y$  derivata fracționară în sens Caputo, de ordin  $\alpha$  a funcției  $y$ , cu  $n - 1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}^*$ ;

- în **al treilea Capitol** -Teoremele 3.1.1, 3.1.2, 3.3.1, 3.5.1 și 3.6.1 împreună cu soluțiile analitice aproximative de tip polinomial, determinate cu ajutor metodei de aproximare polinomială în sensul celor mai mici pătrate aplicată pe diviziuni ale domeniului de definiție (metodei MAPMPDI) pentru ecuații Bagley-Torvik, ecuații diferențiale Riccati de ordin fracționar, ecuații neliniare cu derivate parțiale de ordin fracționar și pentru sisteme de ecuații diferențiale;

ecuațiile diferențiale **Riccati** de ordin fracționar fiind de forma:

$$D^\alpha y(x) - A(x)y^2(x) - B(x)y(x) = f(x), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad x \in [a, b], \quad (1.7)$$

cu condiția inițială:

$$y(a) = k, \quad (1.8)$$

unde  $A$  și  $B$  sunt funcții reale date,  $k$  o constantă reală iar  $D^\alpha y$  derivata fracționară în sens Caputo de ordin  $\alpha$  a funcției  $y$  absolut continuă pe intervalul  $[a, b]$ .

- în **Capitolul al patrulea** metoda perturbațiilor omotopice în sensul celor mai mici pătrate (metoda MPOMP) cu Teorema 4.1.1 se aplică pentru determinarea soluției unui sistem care descrie fluxul sanguin;

- **ultimul Capitol** conține Teorema 5.1.1 și descrierea unei noi metode de aproximare polinomială în sensul celor mai mici pătrate pe subintervale (MAPMPS), utilizată pentru determinarea soluțiilor analitice aproximative de tip polinomial pentru ecuații cu derivate fracționare.

## Capitolul 2

# Metoda de aproximare polinomială în sensul celor mai mici pătrate

În acest capitol se începe cu descrierea metodei, așa cum a fost ea prezentată în 2012 de profesorii C. Bota și B. Cărunțu în articolul  *$\varepsilon$ -Approximate polynomial solutions for the multi-pantograph equation with variable coefficients*, din Applied Mathematics and Computation [27].

În subcapitolele 2.2 - 2.6 se prezintă modul în care metoda MAPMP a fost utilizată pentru determinarea soluțiilor aproximative analitice pentru diverse tipuri de ecuații diferențiale. Cu ajutorul metodei de aproximare polinomială în sensul celor mai mici pătrate (MAPMP) se determină soluții analitice aproximative pentru ecuații de tip Bagley-Torvik - rezultatele obținute fiind publicate în [89], pentru ecuații de tip Lane-Emden - rezultatele au apărut în [21], pentru probleme de control optimal în [69] și pentru ecuații integro-diferențiale Fredholm-Volterra cu rezultatele publicate în [31].

### 2.1 Descrierea metodei (MAPMP)

Se consideră o ecuație de forma:

$$F(y^{(\alpha-1)}(x), y^{(\alpha-2)}(x), \dots, y'(x), y(x), x) = y^{(\alpha)}(x), \quad x \in [a, b] \subset \mathbb{R} \quad (2.1)$$

care satisface condițiile la frontieră:

$$y(a) = \mu_1, \quad y(b) = \mu_2 \quad (2.2)$$

cu  $\alpha \in \mathbb{Q}_+$ ,  $y$  o funcție absolut continuă pe intervalul  $[a, b]$ ,  $F$  funcție reală continuă pe intervalul  $[a, b]$ , și  $\mu_1, \mu_2$  constante reale, astfel încât să fie satisfăcută condiția de existență și unicitate a soluției problemei. Se cere găsirea acestei soluții.

Cum determinarea soluției exacte pentru probleme de acest tip, de cele mai multe ori nu este posibilă, se dezvoltă diverse metode pentru determinarea unor soluții aproximative.

O astfel de metodă aproximativă, care va returna o soluție analitică este și metoda de aproximare polinomială în sensul celor mai mici pătrate MAPMP.

Pentru aplicarea metodei, ecuației (2.1) îi este atașat operatorul

$$\mathcal{D}(y(x)) = y^{(\alpha)}(x) - F(y^{(\alpha-1)}(x), y^{(\alpha-2)}(x), \dots, y'(x), y(x), x) \quad x \in [a, b]. \quad (2.3)$$

Se notează cu  $\tilde{y}$  o soluție aproximativă de tip polinomial a ecuației inițiale. Eroarea obținută prin înlocuirea soluției exacte  $y$  cu această aproximare este dată de restul

$$\mathcal{R}(x, \tilde{y}(x)) = \mathcal{D}(\tilde{y}(x)), \quad x \in [a, b]. \quad (2.4)$$

Soluția aproximativă  $\tilde{y}$  de tip polinomial care se caută îndeplinește condițiile:

$$|\mathcal{R}(x, \tilde{y}(x))| < \varepsilon; \quad \tilde{y}(a) = \mu_1, \quad \tilde{y}(b) = \mu_2, \quad (2.5)$$

pentru  $\varepsilon$  pozitiv.

**Definiție 2.1.1.** Pentru problema inițială dată (2.1), o soluție polinomială  $\tilde{y}$  care satisface condiția 2.5 se numește **soluție  $\varepsilon$  aproximativă**.

**Definiție 2.1.2.** Soluția  $\tilde{y}$  se numește **soluție slab  $\varepsilon$  aproximativă** dacă satisface relația:

$$\int_a^b |\mathcal{R}(x, \tilde{y}(x))| dx \leq \varepsilon \quad (2.6)$$

împreună cu cele două condiții la frontieră:  $\tilde{y}(a) = \mu_1, \quad \tilde{y}(b) = \mu_2$ .

În continuare se consideră un  $\tilde{y}$  de polinoame de forma:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{0, n} \quad (2.7)$$

care satisface condițiile:  $P_n(a) = \mu_1, P_n(b) = \mu_2$ .

**Definiție 2.1.3.**  $P_n(x)$  este **convergent la soluția problemei inițiale** (2.1-2.2) dacă este satisfăcută condiția:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{D}(P_n(x)) = 0$ .

Se va construi o soluție slab  $\varepsilon$  aproximativă:

$$\tilde{y}(x) = \sum_{k=0}^n d_k x^k, \quad n > 1 \quad (2.8)$$

în care pentru determinarea coeficienților reali  $d_0, d_1, \dots, d_n$  se parcurg următoarele etape:

1.  $\tilde{y}$  fiind o soluție aproximativă, ea generează un rest (prin înlocuirea soluției exacte  $y$  cu  $\tilde{y}$ ):

$$\mathcal{R}(x, \tilde{y}(x)) = y^{(\alpha)}(x) - F(y^{(\alpha-1)}(x), y^{(\alpha-2)}(x), \dots, y'(x), y(x), x), \quad x \in [a, b] \quad (2.9)$$

Din cele două condiții la frontieră se obțin:

$$d_0 = \mu_1 \text{ și } d_1 + d_2 + \cdots + d_n = \mu_2 - \mu_1.$$

2. Se atașează funcționala:

$$\mathcal{J}(d_1, d_2, \dots, d_n) = \int_a^b \mathcal{R}^2(x, \tilde{y}(x)) dx. \quad (2.10)$$

3. Se minimizează funcționala  $\mathcal{J}$  în raport cu coeficienții reali  $d_1, d_2, \dots, d_n$  și se obține:

$$\mathcal{J}(d_1^0, d_2^0, \dots, d_n^0) = \min \left( \int_a^b \mathcal{R}^2(x, \tilde{y}(x)) dx \right)$$

4. Se utilizează acești noi coeficienți ( $d_k^0$ ), care minimizează funcționala (2.10) și se construiește noul polinom:

$$M_n(x) = \sum_{k=0}^n d_k^0 x^k, \quad n > 1$$

**Teoremă 2.1.1.** *Polinomul  $M_n(x)$  construit utilizând algoritmul descris mai sus este o soluție slab  $\varepsilon$  aproximativă (în sensul Definiției (3.1.1)) pentru problema formată din ecuația inițială (2.1) și condițiile la frontieră (2.2).*

## Estimarea erorii

**Teoremă 2.1.2.** *Se dă o ecuație diferențială de tipul (2.1) împreună cu condițiile (2.2). Dacă problema astfel construită admite soluție unică, atunci maximul erorii pentru o soluție aproximativă determinată cu ajutorul MAPMP se calculează astfel:*

$$\mathcal{E} = \max [|\tilde{e}(x)|, a \leq x \leq b]$$

unde  $\tilde{e}(x)$  este soluția ecuației

$$\begin{aligned} &F(\tilde{e}^{(\alpha-1)}(x), \tilde{e}^{(\alpha-2)}(x), \dots, \tilde{e}'(x), \tilde{e}(x), x) - \tilde{e}^{(\alpha)}(x) \\ &+ \tilde{y}^{(\alpha)}(x) - F(\tilde{y}^{(\alpha-1)}(x), \tilde{y}^{(\alpha-2)}(x), \dots, \tilde{y}'(x), \tilde{y}(x), x) = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

având

$$\tilde{e}(x) + \tilde{y}(x) - y(x) = 0.$$

*Remarcă 2.1.1.* Pentru calculul erorii totale se folosește:

$$Er_{tot} = \sqrt{\int_a^b \tilde{e}^2(x) dx} \quad (2.12)$$

unde  $\tilde{e} = y - \tilde{y}$

## 2.2 MAPMP pentru ecuații de tip Bagley-Torvik

În această secțiune se prezintă o aplicație a metodei MAPMP, descrisă în subcapitolul 2.1, pentru rezolvarea unor ecuații cu derivate fracționare de tip Bagley-Torvik. Ecuațiile Bagley-Torvik pot fi utilizate pentru descrierea mișcării unei plăci subțiri rigide scufundate într-un lichid newtonian [20], [62], [89].

Ecuației Bagley-Torvik cu condiții la frontieră îi este atașat operatorul:

$$\mathcal{D}(y(x)) = y''(x) + A(x)y'(x) + B(x)D^\alpha y(x) + C(x)y(x) - f(x), \quad x \in [a, b]. \quad (2.13)$$



Se notează cu  $\tilde{y}$  o soluție aproximativă a ecuației inițiale și înlocuind soluția exactă  $y$  cu această soluție aproximativă se obține restul:

$$\mathcal{R}(x, \tilde{y}(x)) = \mathcal{D}(\tilde{y}(x)), \quad x \in [a, b], \quad (2.14)$$

pentru  $\tilde{y}$  fiind satisfăcute:

$$|\mathcal{R}(x, \tilde{y}(x))| < \varepsilon; \quad \tilde{y}(a) = \mu_1, \quad \tilde{y}(b) = \mu_2, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}_+$$

unde  $\varepsilon$  este ales astfel încât eroarea calculată așa cum este descris în secțiunea 2.1 să nu depășească o valoare stabilită.

Se construiește un polinom de forma:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{0, n}$$

care verifică condițiile:  $P_n(a) = \mu_1$  și  $P_n(b) = \mu_2$ .

De asemenea, se construiește o soluție slab  $\varepsilon$  aproximativă, în sensul Definiției 2.1.2

$$\tilde{y}(x) = \sum_{k=0}^n d_k x^k, \quad n > 1,$$

în care pentru determinarea coeficienților reali  $d_0, d_1, \dots, d_n$  se parcurg următoarele etape:

- $\tilde{y}$  fiind o soluție aproximativă, restul devine (înlocuind soluția exactă  $y$  cu  $\tilde{y}$ )

$$\mathcal{R}(x, \tilde{y}(x)) = D^\alpha \tilde{y}(x) + A(x)\tilde{y}'(x) + B(x)\tilde{y}(x) - f(x) \quad (2.15)$$

Cu ajutorul celor două condiții la frontieră se obțin

$$d_0 = \mu_1; \quad d_1 + d_2 + \cdots + d_n = \mu_2 - \mu_1;$$

- Se atașează funcționala:

$$\mathcal{J}(d_1, d_2, \dots, d_n) = \int_a^b \mathcal{R}^2(x, \tilde{y}(x)) dx. \quad (2.16)$$

- Cu acești coeficienți reali ( $d_k^0$ ) care minimizează funcționala (2.16) se construiește un nou polinom:

$$M_n(x) = \sum_{k=0}^n d_k^0 x^k, \quad n > 1$$

care este o soluție slab  $\varepsilon$  aproximativă pentru problema inițială.

Rezultatele obținute astfel sunt prezentate în articolul: "Approximate solutions for the Bagley-Torvik fractional equation with boundary conditions using the Polynomial Least Squares Method" - în cadrul conferinței ICCMAE din 23-24.05.2018. Această lucrare conține primele calcule care au fost făcute chiar la începutul stagiului doctoral, conferința ICCMAE fiind prima la care am participat. Articolul apărut în proceedings-ul conferinței a fost citat de A. M. Vargas în 2022 [116].

În cadrul articolului sunt prezentate comparativ rezultatele obținute pentru mai multe ecuații de tip Bagley-Torvik rezolvate de alți autori cu ajutorul mai multor metode de aproximare.

Exemplul 2.2.1. Se aplică aceeași metodă pentru problema:

$$\begin{cases} y''(x) + D^{\frac{3}{2}}y(x) + y(x) = f(x) \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 1 \end{cases}, \quad (2.17)$$

unde  $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție absolut continuă, iar  $f(x) = 2 + 4 \cdot \sqrt{\frac{x}{\pi}} + x^2$ . Pentru această problemă se cunoaște soluția exactă  $y(x) = x^2$ .

O soluție aproximativă, cu eroare destul de mare este propusă de Celikerși Kurulay în [123], utilizând metoda "Hibrid discontinuă Galerkin".

Urmând algoritmul descris mai sus, cu ajutorul MAPMP se caută o soluție de tip polinomial  $\tilde{y}(x) = d_0 + d_1 \cdot x + d_2 \cdot x^2 + d_3 \cdot x^3$ , soluție care să îndeplinească condițiile la frontieră indicate,  $\tilde{y}(0) = 0$  și  $\tilde{y}(1) = 1$ . Astfel  $d_0 = 0$  și  $d_1 = 1 - d_2 - d_3$  soluția aproximativă devenind  $\tilde{y}(x) = (1 - d_2 - d_3) \cdot x + d_2 \cdot x^2 + d_3 \cdot x^3$ .

Restul construit (de tip 2.15) este

$$\mathcal{R}(\tilde{y}) = d_2 \cdot (x \cdot (x - 1)) + x \cdot (1 - x + d_3 \cdot (5 + x^2)) + \frac{4\sqrt{x} \cdot (d_2 + 2 \cdot d_3 \cdot x - 1)}{\sqrt{\pi}}$$

Pentru  $d_2 = 1$  și  $d_3 = 0$  acest rest este nul, și din nou soluția aproximativă  $\tilde{y}$  coincide cu soluția exactă indicată pentru aceasta problemă  $\tilde{y}(x) = x^2$ .

În cazul în care soluția exactă a problemei nu este cunoscută (nu este indicată), situație des întâlnită în practică, folosind MAPMP, cu ajutorul restului  $\mathcal{R}(\tilde{y})$  (de tip 2.15) se construiește funcționala  $\mathcal{J}(d_2, d_3)$  de tip (2.16):

$$\mathcal{J}(d_2, d_3) = \int_0^1 \mathcal{R}^2(\tilde{y}) dx$$

Pentru a calcula cei doi coeficienți reali  $d_2$  și  $d_3$  se minimizează funcționala și se determină punctele critice ca soluții ale sistemului:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial d_2} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial d_3} = 0 \end{cases},$$

obținându-se:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial d_2} = \frac{707 \cdot \pi \cdot (2 \cdot d_2 + 3 \cdot d_3 - 2) + 1120 \cdot (3 \cdot d_2 + 4 \cdot d_3 - 3)}{210 \cdot \pi} + \\ \quad + \frac{64 \cdot \sqrt{\pi} \cdot (64 \cdot d_2 + 97 \cdot d_3 - 64)}{210 \cdot \pi} \\ \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial d_3} = \frac{24640 \cdot (2 \cdot d_2 + 3 \cdot d_3 - 2) + 64 \cdot \sqrt{\pi} \cdot (1067 \cdot (d_2 - 1) + 1860 \cdot d_3)}{2310 \cdot \pi} + \\ \quad + \frac{11 \cdot \pi \cdot (2121 \cdot (d_2 - 1) + 4400 \cdot d_3)}{2310 \cdot \pi} \end{cases}$$

Singurul punct staționar al sistemului astfel determinat este  $d_2 = 1$  și  $d_3 = 0$ . Acest punct este unul de minim, deci  $d_2 = 1$  și  $d_3 = 0$  conduc la minimul funcționalei  $\mathcal{J}(d_2, d_3)$  găsind astfel soluția aproximativă :  $\tilde{y}(x) = x^2$ , soluție ce este chiar soluția exactă indicată pentru această problemă.

Exemplul 2.2.2. În mod similar se rezolvă și problema:

$$\begin{cases} y''(x) + D^{0.3}y(x) = f(x), & x \in [0, 1] \\ y(0) = 0, y(1) = 1 \end{cases} \quad (2.18)$$

unde

$$f(x) = -6x + 2 + x^{3.7} \left( \frac{6}{\Gamma(3.7)} - x^{2.7} \frac{2}{\Gamma(2.7)} \right)$$

și pentru care soluția exactă este  $y(x) = x^2(1 - x)$ .

Folosind MAPMP se găsește restul de forma (2.14) unde soluția aproximativă  $\tilde{y}(x)$  a fost construită ca un polinom de grad trei de forma:  $\tilde{y}(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3$ .

Din condițiile la frontieră  $\tilde{y}(0) = 0$  și  $\tilde{y}(1) = 1$  se determină  $d_0 = 0$ ,  $d_1 = -d_2 - d_3$  și  $\tilde{y}(x) = (-d_2 - d_3)x + d_2x^2 + d_3x^3$ .

Se construiește funcționala  $\mathcal{J}$  și se minimizează în raport cu coeficienții reali  $d_2$  și  $d_3$ . Cu ajutorul noilor coeficienți astfel determinați se obține soluția aproximativă:

$$\tilde{y}(x) = 9.515 \cdot 10^{-10}x + 1 \cdot x^2 - 1 \cdot x^3.$$

În [7] Alkan aplică ”Sinc Colocation Method” și determină o soluție aproximativă a acestei probleme. În Tabela 2.1 se prezintă eroarea comparativă a celor două soluții aproximative, găsite prin MAPMP, respectiv prin SCM, observându-se eficacitatea metodei MAPMP.

x	$\varepsilon_{SCM}$ [7]	$\varepsilon_{MAPMP}$
0.1	$3.06 \times 10^{-3}$	$2.46 \times 10^{-10}$
0.2	$3.08 \times 10^{-4}$	$7.24 \times 10^{-10}$
0.3	$3.49 \times 10^{-3}$	$1.32 \times 10^{-9}$
0.4	$3.24 \times 10^{-3}$	$1.94 \times 10^{-9}$
0.5	$1.49 \times 10^{-4}$	$2.47 \times 10^{-9}$
0.6	$2.99 \times 10^{-3}$	$2.80 \times 10^{-9}$
0.7	$3.78 \times 10^{-3}$	$2.82 \times 10^{-9}$
0.8	$1.66 \times 10^{-3}$	$2.43 \times 10^{-9}$
0.9	$2.61 \times 10^{-4}$	$1.53 \times 10^{-9}$
1	0	0

Tabela 2.1: Comparații între eroarea absolută obținută în [7] prin SCM și eroarea obținută prin MAPMP

Prin calcularea erorii totale așa cum s-a specificat în paragraful anterior:

$$Er_{tot} = \sqrt{\int_a^b E^2(x) dx}$$

unde  $E = y - \tilde{y}$ , se obține:  $Er_{tot} = 1.5217 \times 10^{-15}$ .

Cu ajutorul acestor aplicații numerice se arată utilitatea metodei MAPMP pentru determinarea soluțiilor analitice pentru problemele Bagley-Torvik, soluții ce se determină cu o precizie ridicată. De asemenea tipul soluției (polinom), relativ ușor de determinat, face ca metoda MAPMP să fie rapidă și facil de utilizat.

## 2.3 MAPMP pentru ecuații de tip Lane Emden

Tot cu ajutorul metodei MAPMP se determină și soluții analitice aproximative pentru ecuații fracționare de tip Lane-Emden.

Ecuația Lane-Emden este [68], [46] utilizată pentru modelarea fenomenelor în fizica matematică, astrofizică și mecanica celestă, cum ar fi comportamentul termic al unui nor sferic de gaz sub atracția reciprocă a moleculelor sale (conform Chandrasekhar 1967). Pentru aceste ecuații, parcurgând etapele din descrierea metodei MAPMP se determină soluții analitice aproximative de tip polinomial  $\tilde{y}$ .

*Exemplul 2.3.1.*

Se consideră ecuația standard fracționară Lane-Emden:

$$D^\alpha y(x) + \frac{2}{x} \cdot D^\beta y(x) + y^p(x) = 0, \quad x \in (0, 1], \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad 0 < \beta \leq 1, \quad p \in \mathbb{N} \quad (2.19)$$

împreună cu condițiile:

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \quad (2.20)$$

unde  $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y$  absolut continuă pe  $[0, 1]$ .

Pentru  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$  și  $p = 5$  se cunoaște soluția exactă a problemei:

$$y_e(x) = \left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{-1/2}.$$

În acest caz, se construiește o soluție aproximativă de tip polinom de grad opt. Prin aplicarea metodei *MAPMP* obținându-se:

$$\tilde{y}(x) = 1 - 0.16667008728165014 \cdot x^2 + 0.00010107837073407321 \cdot x^3 + 0.040795516572604364 \cdot x^4 + 0.003462406437332758 \cdot x^5 - 0.018921294683195165 \cdot x^6 + 0.00849801417075113 \cdot x^7 - 0.0012402301506061635 \cdot x^8.$$

Figura 2.1 prezintă eroarea absolută aferentă soluției aproximative MAPMP, ca diferență în valoare absolută între soluția aproximativă și cea exactă pentru  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $p = 5$ .

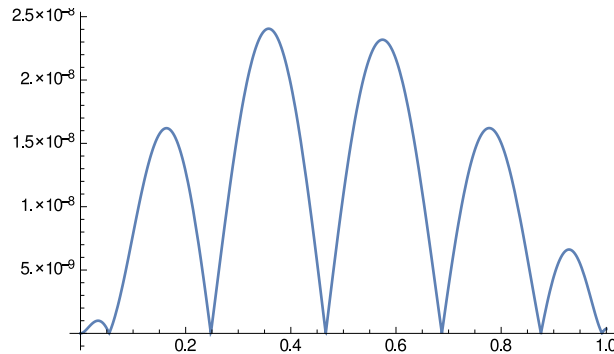


Figura 2.1: Eroarea absolută corespunzătoare soluției aproximative  $\tilde{y}$  pentru problema (2.19)-(2.20).

*Exemplul 2.3.2.*

Se consideră ecuația fracționară a sferelor de gaz izoterme care este o ecuație de forma:

$$D^\alpha y(x) + \frac{2}{x} \cdot D^\beta y(x) - e^{y(x)} = 0, \quad x \in (0, 1], \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad 0 < \beta \leq 1 \quad (2.21)$$

care îndeplinește condițiile inițiale:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad (2.22)$$

unde  $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y$  absolut continuă pe  $[0, 1]$ .

Cu ajutorul algoritmului descris anterior se determină soluția analitică aproximativă *MAPMP*

$$\tilde{y}(x) = 0.166666696591 \cdot x^2 - 9.26057498353 \times 10^{-7} \cdot x^3 - 0.00832560094 \cdot x^4 - 0.0000286566827 \cdot x^5 + 0.000583936718 \cdot x^6 - 0.0000550051331 \cdot x^7 - 0.00001276697194 \cdot x^8.$$

Gradul polinomului de aproximare se determină pornind de la eroarea care se dorește să fie obținută. Cum nu se cunoaște o soluție exactă pentru acest tip de ecuație, pentru a compara soluția aproximativă *MAPMP*  $\tilde{y}$  cu cele anterioare, se calculează pentru fiecare soluție aproximativă erorile absolute. Se definesc erorile ca diferențe (în modul) între valorile soluției aproximative și ale soluțiilor numerice prezentate în literatură.

Tabelul 2.2 prezintă comparații între valorile erorilor absolute corespunzătoare *MAPMP* cu cele corespunzătoare Metodei Haar Adomian (*HAdM*) propusă de Saeed [104] în 2017, Tehnica de Aproximare fracționară (*FAT*) propusă de Mirza [79] în 2009, o soluție de serie de puteri accelerată (*APSS*) propusă de Nouh [82] în 2004 și o soluție de serii de puteri (*PSS*) propusă de Hunter [60] în 2001.

$x$	$\varepsilon_{HAdM}$ [104]	$\varepsilon_{FAT}$ [79]	$\varepsilon_{APSS}$ [82]	$\varepsilon_{PSS}$ [60]	$\varepsilon_{MAPMP}$
0.1	$3.386 \times 10^{-8}$	$6.583 \times 10^{-5}$	$1.493 \times 10^{-2}$	$6.583 \times 10^{-5}$	$9.055 \times 10^{-11}$
0.2	$3.289 \times 10^{-8}$	$5.336 \times 10^{-5}$	$2.664 \times 10^{-2}$	$1.533 \times 10^{-4}$	$1.416 \times 10^{-10}$
0.3	$1.672 \times 10^{-8}$	$3.288 \times 10^{-5}$	$3.506 \times 10^{-2}$	$4.328 \times 10^{-4}$	$2.290 \times 10^{-10}$
0.4	$2.366 \times 10^{-8}$	$1.445 \times 10^{-4}$	$4.014 \times 10^{-2}$	$1.155 \times 10^{-3}$	$3.378 \times 10^{-10}$
0.5	$4.270 \times 10^{-8}$	$4.460 \times 10^{-4}$	$4.214 \times 10^{-2}$	$2.653 \times 10^{-3}$	$6.976 \times 10^{-11}$
0.6	$2.523 \times 10^{-8}$	$8.559 \times 10^{-4}$	$4.105 \times 10^{-2}$	$5.344 \times 10^{-3}$	$3.203 \times 10^{-10}$
0.7	$4.235 \times 10^{-9}$	$1.574 \times 10^{-3}$	$3.687 \times 10^{-2}$	$9.726 \times 10^{-3}$	$1.210 \times 10^{-11}$
0.8	$4.682 \times 10^{-8}$	$2.613 \times 10^{-3}$	$2.991 \times 10^{-2}$	$1.638 \times 10^{-2}$	$2.890 \times 10^{-10}$
0.9	$2.425 \times 10^{-8}$	$4.001 \times 10^{-3}$	$2.020 \times 10^{-2}$	$2.599 \times 10^{-2}$	$9.922 \times 10^{-12}$
1	$2.247 \times 10^{-8}$	$5.772 \times 10^{-3}$	$7.772 \times 10^{-3}$	$3.902 \times 10^{-2}$	$5.838 \times 10^{-12}$

Tabela 2.2: Comparație între erorile absolute ale soluțiilor aproximative pentru ecuația sferei izoterme de gaz pentru  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$ .

Având aceste rezultate pentru cazul  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$ , se calculează în același mod, aproximările alegându-le tot de tip polinom de grad 8, și soluții analitice aproximative *MAPMP* pentru diverse valori ale lui  $\alpha$  și  $\beta$ .

## 2.4 MAPMP pentru Probleme de control optimal

Aplicând aceeași metodă MAPMP se determină soluții analitice aproximative pentru **probleme de control optimal** care se pot reduce la forma:

$$y'' = \mathcal{F}(y', y, x).$$

Se consideră legea de control optimal

$$u : [0, x_f] \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

care minimizează performanța funcționalei:

$$J = \int_0^{x_f} F(y, u, x) dx \quad (2.23)$$

unde ecuația de stare este:

$$y' = f(y, u, x) \quad (2.24)$$

iar variabila de stare  $y$  satisface condițiile  $y(0) = y_0$  și  $y(x_f) = y_f$ .

Se consideră îndeplinită condiția  $F$  de clasă  $C^1$  ceea ce înseamnă că soluția problemei de control optimal există și este unică pentru anumite condiții date (cunoscute).

Se observă că legea de control optimal  $u$  se poate exprima (cu ajutorul 2.24) în funcție de variabila de stare  $y$ .

Astfel rezolvarea problemei de control optimal (2.23) revine la rezolvarea unei probleme de calcul variațional, de determinare a minimumului funcționalei:

$$J = \int_0^{x_f} G(x, y, y') dx \quad (2.25)$$

cu

$$y(0) = y_0, \quad y(x_f) = y_f \quad (2.26)$$

unde relația (2.25) se obține din (2.23) substituind expresia lui  $u$  ca funcție de  $y$ .

Condiția necesară pentru unicitatea soluției problemei (2.25, 2.26) este ca  $y$  să satisfacă ecuația Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial G}{\partial y'} \right), \quad (2.27)$$

și se obține astfel problema de control optimal sub forma:

$$y'' = \mathcal{F}(y', y, x). \quad (2.28)$$

Pentru aplicarea metodei MAPMP se definește operatorul:

$$\mathcal{D}(y) = y'' - \mathcal{F}(y', y, x) \quad (2.29)$$

și dacă se notează cu  $\tilde{y}$  o soluție aproximativă de tip polinomial a ecuației (2.28), eroarea ce se obține prin înlocuirea soluției exacte  $y$  cu această soluție aproximativă determină un rest de forma:

$$\mathcal{R}(x, \tilde{y}) = \mathcal{D}(\tilde{y}), \quad x \in [0, x_f]. \quad (2.30)$$

care conduce la :

$$\mathcal{R}(x, \tilde{y}) = \tilde{y}'' - \mathcal{F}(\tilde{y}', \tilde{y}, x) \quad (2.31)$$

Se construiește funcționala:

$$\mathcal{J}(d_2, d_3 \dots, d_m) = \int_0^{x_f} \mathcal{R}^2(x, \tilde{y}) dx \quad (2.32)$$

Se minimizează funcționala  $\mathcal{J}$  în raport cu coeficienții reali  $d_2, d_3 \dots, d_m$ . Valorile obținute în urma minimizării reprezintă coeficienții noului polinom care reprezintă soluția analitică aproximativă a problemei de control optimal date inițial.

*Exemplul 2.4.1.*

O aplicație numerică pentru procedeul descris este determinarea soluției analitice pentru problema de tipul

$$\min_{u(x)} \int_0^1 [(2 - y(x))^2 + u^2(x)] dx, \quad x \in [0, 1] \quad (2.33)$$

unde ecuația de stare este:

$$y'(x) = u(x) - \frac{1}{4} \sqrt{y(x)} \quad (2.34)$$

condițiile la frontieră fiind:

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 2 \quad (2.35)$$

unde  $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y$  absolut continuă pe  $[0, 1]$ .

Pentru această problemă de control optimal este dată în [15] soluția:

$$y(x) = \frac{e^{-x}(-e - 63e^2 - 63e^x + 63e^{2x} + 63e^{2+x} + e^{1+2x})}{32(-1 + e^2)}$$

În vederea aplicării MAPMP se parcurg următoarele etape:

**1.** Se folosește (2.34) și de obține legea de control optimal  $u$  în funcție de variabila de stare  $y$ :

$$u(x) = y'(x) + \frac{1}{4} \sqrt{y(x)} \quad (2.36)$$

Se inlocuiește expresia lui  $u$  în problema inițială, de unde rezultă următoarea problemă de calcul variațional, de determinare a minimumului funcționalei:

$$\int_0^1 [(2 - y(x))^2 + (y'(x) + \frac{1}{4} \sqrt{y(x)})^2(x)] dx \quad (2.37)$$

împreună cu condițiile la frontieră  $y(0) = 0, \quad y(1) = 2$ .

**2.** Ecuația Euler Lagrange corespunzătoare este:

$$y''(x) - y(x) + \frac{63}{32} = 0 \quad (2.38)$$

**3.** Pentru ecuația (2.38) se construiește prin utilizarea procedeului MAPMP descris anterior, o soluție aproximativă polinomială de grad 9 astfel:

$$\tilde{y}(x) = d_0 + d_1 \cdot x + d_2 \cdot x^2 + d_3 \cdot x^3 + d_4 \cdot x^4 + d_5 \cdot x^5 + d_6 \cdot x^6 + d_7 \cdot x^7 + d_8 \cdot x^8 + d_9 \cdot x^9.$$

Din condițiile la frontieră rezultă:  $\tilde{d}_0 = 0$  și  $d_1 = 2 - d_2 - d_3 - d_4 - d_5 - d_6 - d_7 - d_8 - d_9$ . Restul corespunzător obținut înlocuind soluția exactă cu soluția aproximativă este:

$$\mathcal{R}(x) = -\frac{63}{16} - 2 \cdot (2 \cdot d_2 + 6 \cdot d_3 \cdot x + 12 \cdot d_4 \cdot x^2 + 20 \cdot d_5 \cdot x^3 + 30 \cdot d_6 \cdot x^4 + 42 \cdot d_7 \cdot x^5 + 56 \cdot d_8 \cdot x^6 + 72 \cdot d_9 \cdot x^7) + 2 \cdot ((2 - d_2 - d_3 - d_4 - d_5 - d_6 - d_7 - d_8 - d_9) \cdot x + d_2 \cdot x^2 + d_3 \cdot x^3 + d_4 \cdot x^4 + d_5 \cdot x^5 + d_6 \cdot x^6 + d_7 \cdot x^7 + d_8 \cdot x^8 + d_9 \cdot x^9).$$

Minimizând funcționala de tip (2.32)  $\mathcal{J}$  în raport cu coeficienții reali  $(d_2, d_3, \dots, d_9)$ , se obține soluția analitică aproximativă, de tip polinomial:

$$\tilde{y}(x) = 2.6116294098342 \cdot x + 0.9843749991096 \cdot x^2 + 0.435271546661696 \cdot x^3 + 0.08203105649571 \cdot x^4 + 0.021762704663334 \cdot x^5 + 0.0027321111314777 \cdot x^6 + 0.0005146366961518 \cdot x^7 + 0.0000454584242327 \cdot x^8 + 0.000005327350329483 \cdot x^9.$$

4. Din ecuația:

$$\tilde{u}(x) = \tilde{y}'(x) + \frac{1}{4} \sqrt{\tilde{y}(x)}$$

și din expresia lui  $\tilde{y}$  se determină ușor  $\tilde{u}$ .

Tabelul 2.5 prezintă erorile absolute (ca modul al diferenței între valoarea exactă și valoarea aproximativă) corespunzătoare aproximărilor pentru variabila de stare  $\tilde{y}$  și pentru legea de control optimal  $\tilde{u}$  obținute utilizând metoda MAPMP.

$\mathbf{x}$	$\varepsilon_{\tilde{y}}_{MAPMP}$	$\varepsilon_{\tilde{u}}_{MAPMP}$
0	0	$4.440 \cdot 10^{-16}$
0.1	$2.317 \cdot 10^{-13}$	$2.194 \cdot 10^{-11}$
0.2	$6.393 \cdot 10^{-13}$	$1.921 \cdot 10^{-11}$
0.3	$1.423 \cdot 10^{-12}$	$7.726 \cdot 10^{-12}$
0.4	$7.804 \cdot 10^{-14}$	$2.682 \cdot 10^{-11}$
0.5	$1.620 \cdot 10^{-12}$	$1.299 \cdot 10^{-12}$
0.6	$2.264 \cdot 10^{-13}$	$2.589 \cdot 10^{-11}$
0.7	$1.334 \cdot 10^{-12}$	$9.465 \cdot 10^{-12}$
0.8	$6.727 \cdot 10^{-13}$	$1.677 \cdot 10^{-11}$
0.9	$1.718 \cdot 10^{-13}$	$2.004 \cdot 10^{-11}$
1.0	$2.220 \cdot 10^{-16}$	0

Tabela 2.3: Erorile absolute pentru aproximările variabilei de stare  $\tilde{y}$  și a legii de control optimal  $\tilde{u}$  obținute utilizând MAPMP

## 2.5 MAPMP pentru ecuații integro-diferetiale neliniare de tip Fredholm Volterra

În acest subcapitol sunt prezentate rezultatele obținute aplicând MAPMP pentru determinarea soluțiilor analitice aproximative pentru ecuații integro-diferetiale nelini-



are de tip Fredholm Volterra de forma:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n p_j(x) \cdot y^{(j)}(x) = f(x) + \lambda_1 \cdot \int_a^x k_1(x, s) \cdot g_1(s, y(s), y'(s)) ds \\ + \lambda_2 \cdot \int_a^b k_2(x, s) \cdot g_2(s, y(s), y'(s)) ds, \quad x \in [a, b] \end{aligned} \quad (2.39)$$

pentru care se cunosc condiții de tipul

$$\sum_{j=0}^{n-1} [\alpha_{ij} \cdot y^{(j)}(a) + \beta_{ij} \cdot y^{(j)}(b)] = \mu_i, \quad i = 0, \dots, n-1. \quad (2.40)$$

unde  $a, b, \lambda_1, \lambda_2$  sunt constante, iar  $p_j$  ( $j = 0, \dots, n$ ),  $y, f, k_1, k_2, g_1, g_2$  sunt funcții reale continue pe intervalul  $[a, b]$ .

Ecuatia de mai sus este una foarte generală cuprinzând atât ecuații Fredholm cât și Volterra, liniare și neliniare, integro-diferențiale dar și ecuații integrale.

Cu câteva excepții, pentru acest tip de ecuații nu se poate determina soluția exactă, fiind prezentate în literatură doar soluții numerice sau soluții analitice aproximative. De o mai mare utilitate este determinarea unei soluții analitice și bineînțeles una cu o aproximare cât mai bună, cu o eroare cât mai mică, cât mai apropiată de soluția exactă. Pentru determinarea acestor soluții aproximative s-au utilizat diverse metode dintre care menționez doar câteva: metoda dezvoltării în serii Taylor [73, 118], metodele Tau [58, 59], metoda Perturbarilor omotopice [50], metoda polinoamelor Bessel [121], metodele Legendre [67], metoda matriceală Bernoulli [17], metoda Haar Wavelet [105, 9, 61], metodele Collocation [78, 39], metoda operatorilor Bernstein-Kantorovich [28], metoda Cattani [72], metoda iterațiilor variaționale [106], metoda polinoamelor Bernstein [2], metode utilizând transformări diferențiale [14].

Pentru determinarea unei soluții analitice aproximative de tip polinomial cu ajutorul metodei MAPMP se parcurg etapele descrise în secțiunea 2.1 pentru ecuația (2.39) împreună cu condiții de tipul (2.40).

*Exemplul 2.5.1.* Ecuație integro-diferențială liniară de ordin 2, de tip Fredholm.

Pentru o ecuație integro-diferențială liniară de ordin 2, de tip Fredholm [58]:

$$\begin{aligned} y''(x) = y(x) - \frac{4}{\pi} \cdot \int_0^\pi y(s) \cos(x-s) ds, \\ y(0) = 1, \quad y'(\pi) = 0. \end{aligned} \quad (2.41)$$

unde  $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y$  absolut continuă pe intervalul  $[0, 1]$ , se cunoaște soluția exactă, conform [58],  $y_e(x) = \cos(x)$ .

În acest caz, pentru a aplica MAPMP se alege o soluție aproximativă polinomială de grad cinci:

$$\tilde{y}(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + c_3 \cdot x^3 + c_4 \cdot x^4 + c_5 \cdot x^5$$

Cu ajutorul condițiilor inițiale se determină coeficienții  $c_0 = 1$  și  $c_1 = -2\pi c_2 - 3\pi^2 c_3 - 4\pi^3 c_4 - 5\pi^4 c_5$ , în funcție de coeficienții  $c_2, c_3, c_4$  și  $c_5$ .

Se obține restul:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(x, \tilde{y}(x)) = R(x, c_2, c_3, c_4, c_5) = & \frac{1}{\pi}(c_2(-x^2 + 2\pi x + 2) - x^3(c_3 - 20c_5) + \\ & 3(2 + \pi^2)c_3x + \pi^3x(4c_4 + 5\pi c_5) - c_4x^4 + 12c_4x^2 - c_5x^5 - 1) - 4\sin(x)((4 + \pi^2)c_2 + \\ & 6\pi(c_3 - 20c_5) + 2\pi^3(c_3 + 2(5 + \pi^2)c_5) + 3(-16 + 4\pi^2 + \pi^4)c_4 - 2) + \\ & 4\cos(x)(2\pi(c_2 + 2(6 + \pi^2)c_4) + 3(4 + \pi^2)c_3 + 5(-48 + 12\pi^2 + \pi^4)c_3). \end{aligned}$$

Cu ajutorul metodei MAPMP se construiește funcționala  $\mathcal{J}(c_2, c_3, c_4, c_5)$ .

Minimizând această funcțională în raport cu  $c_2, c_3, c_4$  și  $c_5$  se obțin coeficienții

$$\begin{aligned} c_2 = -0.495256234419017, c_3 = -0.014423630344293588, \\ c_4 = 0.0570671588506153, c_5 = -0.00726601260392728. \end{aligned}$$

În mod similar, se determină soluțiile MAPMP alegând pentru soluția  $\tilde{y}$  polinoame de grad 7 și grad 9.

Tabelul 2.4 conține comparații între erorile absolute corespunzătoare soluțiilor determinate prin metoda Tau și cele obținute aplicând MAPMP cu polinoame de diverse grade (grad 5, 7 și 9).

$x$	$\varepsilon_{TAU}$ [58]	$\varepsilon_{MAPMP}$ gr. 5	$\varepsilon_{MAPMP}$ gr. 7	$\varepsilon_{MAPMP}$ gr. 9
0	0	0	0	0
0.3	$1.070 \times 10^{-6}$	$1.369 \times 10^{-4}$	$4.933 \times 10^{-7}$	$3.500 \times 10^{-9}$
0.7	$5.452 \times 10^{-6}$	$4.566 \times 10^{-6}$	$1.478 \times 10^{-6}$	$6.276 \times 10^{-9}$
0.99	$3.847 \times 10^{-3}$	$2.056 \times 10^{-4}$	$6.660 \times 10^{-7}$	$3.966 \times 10^{-9}$
1.19	$4.273 \times 10^{-3}$	$2.328 \times 10^{-4}$	$1.932 \times 10^{-6}$	$8.115 \times 10^{-9}$
1.49	$4.591 \times 10^{-3}$	$6.864 \times 10^{-4}$	$7.601 \times 10^{-7}$	$5.214 \times 10^{-9}$
1.97	$7.285 \times 10^{-4}$	$2.352 \times 10^{-4}$	$1.881 \times 10^{-6}$	$7.227 \times 10^{-9}$
2.27	$6.066 \times 10^{-4}$	$1.407 \times 10^{-4}$	$4.163 \times 10^{-7}$	$8.899 \times 10^{-9}$
2.66	$1.771 \times 10^{-3}$	$1.238 \times 10^{-4}$	$8.749 \times 10^{-7}$	$5.308 \times 10^{-9}$
3.06	$3.173 \times 10^{-4}$	$3.749 \times 10^{-6}$	$3.332 \times 10^{-7}$	$2.236 \times 10^{-9}$

Tabela 2.4: Comparatie privind eroarea absolută a soluțiilor aproximative pentru Exemplul 2.5.1.

În lucrarea prezentată de Hoseini și colaboratorii [58], soluția constă din 7 polinoame de grad 5, fiecare din ele determinate pe câte o fracțiune din domeniul de definiție. În cazul metodei MAPMP, soluția de tip polinomial este reprezentată de un unic polinom pe întreg domeniul de definiție, ceea ce face ca soluția sa fie obținută mai rapid și mai ușor. De asemenea precizia soluției determinată cu MAPMP este mai mare. Cu ajutorul rezultatelor din Tabelul 2.4 se poate observa și că eroarea descrește odată cu creșterea gradului polinomului de aproximare.

Prin stabilirea unei limite pentru eroarea de care suntem interesați, încă de la început, se determină gradul polinomului de aproximare utilizat în stabilirea formei soluției aproximative căutate.

*Exemplul 2.5.2.* Ecuație integro-diferențială de tip Volterra

În acest exemplu se consideră o ecuație integro-diferențială Volterra împreună cu o condiție inițială [57]:

$$y(x) + \int_0^x \sin(x-s)y(s)y'(s) ds = 2x^3 + x^2 - 12x + 12 \sin(x), \quad (2.42)$$
$$y(0) = 0.$$

cu  $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y$  absolut continuă pe  $[0, 1]$ . Pentru această problemă este cunoscută soluția exactă  $y_e(x) = x^2$ .

Din algoritmul MAPMP, utilizând ca polinom de aproximare un polinom de grad 2 (soluția exactă cunoscută fiind polinom de grad doi),  $\tilde{y}(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0$  se obțin coeficienții  $c_0 = c_1 = 0$  și  $c_2 = 1$ , astfel că soluția aproximativă  $\tilde{y}$  este chiar  $\tilde{y}(x) = x^2$ , care coincide cu soluția exactă prezentată.

Soluția aproximativă  $y_{bp}$  determinată în [57] pe baza unui procedeu bazat pe funcții hibride conduce la erori cuprinse între  $10^{-4}$  și  $10^{-6}$ .

## 2.6 Comentarii bibliografice

În acest capitol este descrisă Metoda de aproximare polinomială în sensul celor mai mici pătrate așa cum a fost ea prezentată de profesorii Bota și Caruntu în 2012 în lucrarea  *$\varepsilon$ -Approximate polynomial solutions for the multi-pantograph equation with variable coefficients* [27], lucrare citată de 13 ori de diverși autori în jurnale de specialitate. Ulterior tot Prof. Bota a publicat în 2013 lucrarea [35] cu 37 de citări în jurnale internaționale de matematică de la apariție pâna în 2022, lucrare în care aplică MAPMP pentru probleme neliniare de tip Lane-Emden.

În cele cinci subcapitole ce urmează descrierii metodei am ilustrat utilitatea metodei prin aplicarea sa în determinarea soluțiilor pentru ecuații de tip Bagley-Torvik, Lane-Emden, probleme de control optimal și ecuații integro-diferențiale de tip Fredholm-Volterra și am prezentat comparativ rezultatele obținute și de alți autori utilizând alte metode de aproximare.

Principale rezultate originale prezentate în Teorema 2.1.1, Teorema 2.1.2 și Remarca 2.1.1 au apărut publicate în [87]. De asemenea, rezultatele originale din partea de exemple numerice au fost prezentate în cadrul conferinței ICCMA din mai 2018 și au apărut publicate în articolul [87] cu citare în 2022 din partea unor autori străini, în jurnal cotelat ISI. De asemenea, a fost publicat în 2019 articolul [29], în care am prezentat utilitatea metodei în rezolvarea ecuațiilor de tip Lane-Emden. Articolul a fost citat de șase ori în jurnale de specialitate internaționale de autori străini preocupați de determinarea soluțiilor aproximative pentru ecuații cu derivate fracționare. În anul 2021 au fost publicate în articolul [19] rezultatele obținute aplicând metoda de aproximare polinomială în sensul celor mai mici pătrate în cazul ecuațiilor integro-diferențiale de tip Fredholm-Volterra, articolul având pâna acum 2 citări în reviste cu factor de impact, din partea unor autori străini.

# Capitolul 3

## Metoda de aproximare polinomială în sensul celor mai mici pătrate aplicată pe diviziuni ale domeniului de definiție

### 3.1 Descrierea metodei (MAPMPDI)

Se consideră ecuația:

$$A \cdot y''(x) + B(x) \cdot D^\alpha y(x) = f(x, y(x), D^\beta y(x), y'(x)), \quad (3.1)$$

cu  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y$  absolut continuă pe intervalul  $[a, b]$ ,  $\alpha \in (1, 2]$ ,  $\beta \in (0, 1]$ , căreia i se asociază:

$$y(a) = \mu_0, \quad \nu_1 \cdot y'(a) + \nu_2 \cdot y(b) = \mu_1 \quad (3.2)$$

unde  $\mu_0$ ,  $\mu_1$ ,  $\nu_1$  și  $\nu_2$  sunt constante (pentru  $\nu_1 = 0$  se obțin condiții la frontieră, iar pentru  $\nu_2 = 0$  se obțin condiții inițiale).  $A \in \mathbb{R}$ ,  $B$  și  $f$  sunt funcții reale date astfel încât pentru problema (3.1-3.2) să fie satisfăcute condițiile de existență și unicitate a soluției.

În ecuația (3.1)  $D^\alpha$  și  $D^\beta$  reprezintă derivata fracționară în sens Caputo de ordin  $\alpha$ , respectiv  $\beta$ , conform Definiției ??.

Pentru determinarea soluției analitice aproximative a problemei (3.1-3.2) se aplică o metodă de aproximare polinomială în sensul celor mai mici pătrate aplicată unei diviziuni a intervalului de definiție - (MAPMPDI).

Etapele necesare pentru aplicarea acestei metode sunt prezentate mai jos.

Pentru început intervalul de definiție  $I = [a, b]$  se împarte în  $M + 1$  subintervale de lungime egală. Se obține diviziunea:

$$\Delta_i : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{M-1} < x_M = b.$$

Ecuației (3.1) i se atașează operatorul:

$$\mathcal{D}(y(x)) = A \cdot y''(x) + B(x) \cdot D^\alpha y(x) - f(x, y(x), D^\beta y(x), y'(x)) \quad (3.3)$$

și se notează cu  $\tilde{y}$  o soluție aproximativă a ecuației (3.1).

Se înlocuiește apoi în expresia lui  $\mathcal{D}$  de mai sus, soluția exactă cu soluția aproximativă și se obține restul, care se notează în continuare  $\mathcal{R}$

$$\mathcal{R}(x, \tilde{y}(x)) = \mathcal{D}(\tilde{y}(x)) \quad (3.4)$$

**Definiție 3.1.1.** Se numește  $\varepsilon$ -**soluție aproximativă** a problemei (3.1-3.2) soluția polinomială aproximativă  $\tilde{y}$ , care satisface relațiile

$$|\mathcal{R}(x_i, \tilde{y}(x_i))| < \varepsilon, \quad \forall i = \overline{0, M} \quad (3.5)$$

$$\tilde{y}(a) = \mu_0, \quad \nu_1 \cdot \tilde{y}'(a) + \nu_2 \cdot \tilde{y}(b) = \mu_1 \quad (3.6)$$

**Definiție 3.1.2.** Fie șirul de polinoame

$$P_N(x) = \sum_{k=0}^N c_k x^k, \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{0, N} \quad (3.7)$$

Acest șir  $P_N(x)$  **converge** la soluția problemei (3.1-3.2) dacă are loc:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{D}(P_N(x)) = 0. \quad (3.8)$$

## Algoritmul metodei MAPMPDI

În sensul Definiției 3.1.1, se construiește o  $\varepsilon$  - soluție aproximativă (polinomială) pentru problema (3.1-3.2) urmând etapele:

- **Etapa 1** - se construiește o soluție aproximativă polinomială de tipul

$$T_N(x) = \sum_{k=0}^N \tilde{c}_k x^k, \quad (3.9)$$

care în plus să satisfacă și condițiile:

$$T_N(a) = \mu_0, \quad \nu_1 \cdot T_N'(a) + \nu_2 \cdot T_N(b) = \mu_1, \quad (3.10)$$

Calculul coeficienților  $\tilde{c}_k$  este descris în continuare:

- **Etapa 2** - din cele două condiții (3.10) se obțin  $\tilde{c}_0$  și  $\tilde{c}_1$  în funcție de  $\tilde{c}_2, \tilde{c}_3 \dots \tilde{c}_N$ , astfel că polinomul  $T_N(x)$  depinde de  $x$  și  $\tilde{c}_2, \tilde{c}_3, \dots, \tilde{c}_N$ .
- **Etapa 3** - se atașează problemei (3.1-3.2) funcționala:

$$\mathcal{F}(\tilde{c}_2, \tilde{c}_3, \dots, \tilde{c}_N) = \sum_{i=0}^M \mathcal{R}^2(x_i, T_N(x_i)) = \quad (3.11)$$

$$= \sum_{i=0}^M (A \cdot T_N''(x_i) + B(x) \cdot D^\alpha T_N(x_i) - f(x, T_N(x_i), D^\beta T_N(x_i), T_N'(x_i)))^2.$$

- **Etapa 4** - se minimizează funcționala descrisă la (3.11) în raport cu toți coeficienții săi reali ( $\tilde{c}_2, \tilde{c}_3, \dots, \tilde{c}_N$ ) și se obțin noii coeficienți notați  $\tilde{c}_2^0, \tilde{c}_3^0 \dots \tilde{c}_N^0$ .

- **Etapa 5** - cu  $\tilde{c}_2^0, \tilde{c}_3^0 \cdots \tilde{c}_N^0$  astfel determinați, ținând cont de condițiile la frontieră se obțin valorile finale pentru  $\tilde{c}_0$  și  $\tilde{c}_1$ .
- **Etapa 6** - se înlocuiesc valorile  $\tilde{c}_0^0, \tilde{c}_1^0, \tilde{c}_2^0, \tilde{c}_3^0 \cdots \tilde{c}_N^0$  astfel calculate în expresia polinomului  $T_N(x)$  și se notează cu  $T_N^0(x) = \sum_{k=0}^N \tilde{c}_k^0 \cdot x^k$  soluția analitică (aproximativă, de tip polinomial) obținută cu ajutorul metodei MAPMPDI, pentru problema (3.1-3.2).

Are loc următoarea teoremă de convergență:

**Teoremă 3.1.1.** *Polinoamele  $T_N(x)$  satisfac relația:*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{R}^2(x_i, T_N(x_i)) = 0, \quad \forall i = \overline{0, M} \quad (3.12)$$

## Estimarea erorii

**Teoremă 3.1.2.** *Problema formată din ecuația diferențială (3.1) și condițiile (3.2), dacă admite soluție unică, atunci se determină maximul erorii pentru o soluție aproximativă calculată aplicând MAPMPSI astfel:*

$$\mathcal{E} = \max [|\tilde{e}(x)|, a \leq x \leq b]$$

unde  $\tilde{e}(x)$  este diferența dintre soluția exactă și soluția aproximativă a problemei.

## 3.2 MAPMPDI pentru ecuații Bagley-Torvik generalizate de ordin fracționar

Metodă (MAPMPDI) descrisă în paragraful anterior este utilizată pentru determinarea soluției analitice aproximative pentru o problemă de tipul (3.1-3.2), mai multe rezultate numerice fiind prezentate în continuare.

*Exemplul 3.2.1.* Pentru ecuația Bagley-Torvik generalizată [44], [70] cu  $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y$  absolut continuă pe intervalul  $[0, 1]$

$$y''(x) + x^{\frac{1}{2}} \cdot D^\alpha y(x) + B y(x) = -x^{\frac{1}{3}} \cdot y'(x) - x^{\frac{1}{4}} \cdot D^\beta y(x) - x^{\frac{1}{5}} y(x) + f_2(x) \quad (3.13)$$

și condițiile:  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 0$ , unde:

$$f_2(x) = 1 - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(3-\alpha)} \cdot x^{2-\alpha} - x^{\frac{1}{3}} \cdot x - \frac{x^{\frac{1}{4}}}{\Gamma(3-\beta)} \cdot x^{2-\beta} + x^{\frac{1}{5}} \cdot (2 - \frac{1}{2} \cdot x^2),$$

$$\alpha = 1.234, \quad \beta = 0.333$$

se cunoaște soluția exactă  $y(x) = 2 - \frac{1}{2} \cdot x^2$ .

Soluții aproximative pentru această problemă, cu eroare mai mare de  $10^{-4}$  a fost propusă de El-Mesiry în [44] iar cu eroare mai mare de  $10^{-5}$  de Li în [70].

Aplicând MAPMPDI se obține o soluție analitică aproximativă pentru ecuația (3.13), cu  $x$  în intervalul  $[0, 1]$ .

Etapele metodei MAPMPDI pentru acest exemplu sunt:

**Etapa 1:** Se alege soluția aproximativă  $\tilde{y}$  de tip polinomial (pentru acest exemplu, polinom de gradul 2, soluția exactă indicată fiind polinom de acest grad)

$$\tilde{y}(x) = \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1 x + \tilde{c}_2 x^2$$

**Etapa 2:** Din cele două condiții date în ipoteză se determină:  $\tilde{c}_0 = 2$ ,  $\tilde{c}_1 = 0$  soluția aproximativă devenind:

$$\tilde{y}(x) = 2 + \tilde{c}_2 x^2.$$

**Etapa 3:** Restul corespunzător (3.4), obținut este:

$$\mathcal{R}(\tilde{y}) = \tilde{c}_2 \left( 2x^{4/3} + x^{11/5} + \frac{1000x^{633/500}}{383\Gamma\left(\frac{383}{500}\right)} + \frac{2000000x^{1917/1000}}{1111889\Gamma\left(\frac{667}{1000}\right)} + 2 \right) + x^{4/3} + \frac{x^{11/5}}{2} + \frac{x^{633/500}}{\Gamma\left(\frac{883}{500}\right)} + \frac{x^{1917/1000}}{\Gamma\left(\frac{2667}{1000}\right)} + 1.$$

Se consideră cea mai simplă diviziune a intervalului de definiție  $[0, 1]$  și anume:  $\Delta_1$ :  $0 = x_0 < x_1 = 1$ , și se atașează funcționala (3.11)

$$\mathcal{F}(\tilde{c}_2) = \sum_{i=0}^1 \mathcal{R}^2(x_i, T_1(x_i)).$$

**Etapa 4:** Pentru determinarea minimumului funcționalei  $\mathcal{F}(\tilde{c}_2)$  se calculează punctele staționare (tot cu Wolfram Mathematica). Astfel  $\tilde{c}_2 = \frac{1}{2}$  este și punctul de minim.

**Etapa 5:** În cazul acestei probleme nu este nevoie să fie aplicată Etapa 5 descrisă în algoritmul de aplicare al metodei MAPMPDI, deoarece avem găsiți deja toți coeficienții  $\tilde{c}_0$ ,  $\tilde{c}_1$  și  $\tilde{c}_2$ .

În final, în **Etapa 6** se înlocuiesc coeficienții  $\tilde{c}_0 = 2$ ,  $\tilde{c}_1 = 0$  și  $\tilde{c}_2 = \frac{1}{2}$  în expresia inițială a lui  $\tilde{y}(x)$ , și se observă că se obține soluția exactă indicată  $\tilde{y}(x) = 2 - \frac{1}{2} \cdot x^2$ .

În cazul acestei probleme, se observă că se poate alege orice diviziune  $\Delta_M$  a intervalului de definiție, deoarece restul (3.4) ne conduce mereu la același punct staționar  $\tilde{c}_2 = \frac{1}{2}$  indiferent cât de mare ar fi numărul  $M$  (numărul de subdiviziuni alese).

### 3.3 MAPMPDI pentru o clasă de ecuații neliniare, cu derivate parțiale de ordin fracționar

Rezultatele obținute astfel au fost publicate în articolul: C.Bota, B. Cărunțu, D. Tucu, M. Lăpădat, **M.S. Pașca**: A Least Squares Differential Quadrature Method for a Class of Nonlinear Partial Differential Equations of Fractional Order, Mathematics 2020 , Volume 8, Issue 8, pag. 1336- 1348, [19]

MAPMPDI utilizată în rezolvarea unor ecuații cu derivate parțiale cu derivata temporală fracționară de tip Caputo:

$$D_t^\alpha y(x, t) = f(y, y_x, y_{xx}), \quad t > 0, (x, t) \in D \quad (3.14)$$

unde  $n - 1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}^*$ ,  $D = [a, b] \times [c, d]$  cu  $a, b, c, d$  constante reale,  $f$  funcție continuă și  $D_t^\alpha$  derivată fracționară în sens Caputo de ordin  $\alpha$  definită astfel:

$$D_t^\alpha y(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \cdot \int_0^t (t - \zeta)^{-(\alpha - n + 1)} \cdot \frac{\partial^n y(x, \zeta)}{\partial t^n} d\zeta, & n - 1 < \alpha < n, \\ \frac{\partial^n y(x, \zeta)}{\partial t^n}, n = \alpha, & n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad (3.15)$$

Ecuția (3.14) împreună cu condițiile

$$y(x, 0) = f_0(x), \quad y_t(x, 0) = fd_0(x) \quad (3.16)$$

unde  $f_0$  și  $fd_0$  sunt funcții continue, date astfel încât să fie satisfăcute condițiile de existență și unicitate a soluției, formează problema pentru care se determină o soluție analitică aproximativă utilizând metoda de aproximare polinomială în sensul celor mai mici pătrate aplicată pe diviziuni ale domeniului de definiție.

În acest caz, de ecuații cu derivate parțiale, metoda MAPMPDI se aplică astfel:

Pentru discretizarea numerică a domeniului de definiție  $D$  [107] se consideră o partiție formată din  $N$  și  $M$  noduri în direcția  $x$  respectiv  $t$ . De asemenea, se consideră că funcțiile  $f$ ,  $f_0$  și  $fd_0$  satisfac condițiile necesare astfel încât problema (3.14-3.16) să admită o unică soluție.

Problemei (3.14 - 3.16) i se atașează operatorul:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(y(x, t)) &= D_t^\alpha y(x, t) - f(y(x, t), y_x(x, t), y_{xx}(x, t)), \\ n - 1 < \alpha \leq n, (x, t) \in D &= [a, b] \times [c, d], n \in \mathbb{N}^* \end{aligned} \quad (3.17)$$

Se construiește  $\tilde{y}$  o soluție aproximativă a ecuației (3.14). Eroarea care se obține înlocuind soluția exactă  $y$  a problemei cu această soluție aproximativă este dată de restul:

$$\mathcal{R}(x, t, \tilde{y}(x, t)) = \mathcal{D}(\tilde{y}(x, t)) \quad (3.18)$$

**Definiție 3.3.1.** Se numește o **soluție  $\varepsilon$  - aproximată** a problemei (3.14-3.16) o soluție aproximativă de tip polinomial  $\tilde{y}$  care satisface următoarea relație (în fiecare din nodurile construite pe domeniul de definiție) :

$$|\mathcal{R}(x_i, t_j, \tilde{y}(x_i, t_j))| < \varepsilon, \quad i = \overline{0, N}, \quad j = \overline{0, M} \quad (3.19)$$

$$\tilde{y}(x_i, 0) = f_0(x_i), \quad \tilde{y}_t(x_i, 0) = fd_0(x_i) \quad (3.20)$$

**Definiție 3.3.2.** Se consideră șirul format din polinoamele:

$$P_{N,M}(x, t) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M c_{ij} x^i t^j, \quad c_{ij} \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{0, N}, \quad j = \overline{0, M} \quad (3.21)$$

Acest șir converge la soluția problemei (3.14-3.16) dacă are loc:

$$\lim_{N, M \rightarrow \infty} \mathcal{D}(P_{N,M}(x, t)) = 0 \quad (3.22)$$



Șirul astfel construit (3.21), satisface relațiile:

$$P_{N,M}(x, 0) = f_0(x), \quad (P_{N,M})_t(x, 0) = fd_0(x) \quad (3.23)$$

Astfel, am determinat o soluție polinomială de tipul:

$$T_{N,M}(x, t) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \tilde{c}_{ij} x^i t^j, \quad (3.24)$$

în care coeficienții  $\tilde{c}_{ij}$  se calculează urmând algoritmul

- Se atașează problemei (3.14-3.16) funcționala:

$$\mathcal{J}(c_{00}, c_{10}, \dots, c_{N0}, c_{01}, \dots, c_{N1}, \dots, c_{0M}, \dots, c_{NM}) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \mathcal{R}^2(x_i, t_i, \tilde{y}(x_i, t_j)), \quad (3.25)$$

în care coeficienții  $c_{00}, c_{10}, \dots, c_{N0}$  și  $c_{01}, c_{11}, \dots, c_{N1}$  se calculează rezolvând sistemul linear obținut din condițiile inițiale astfel:

- din prima condiție inițială se obține:

$$P_{N,M}(x, 0) = c_{00} + c_{10} \cdot x + c_{20} \cdot x^2 + \dots + c_{N0} \cdot x^N = f_0(x). \quad (3.26)$$

Impunând ca relația să fie satisfăcută în nodurile  $(x_0, 0), (x_1, 0), \dots, (x_N, 0)$  se obține un sistem linear de  $N + 1$  ecuații cu  $N + 1$  necunoscute. Acest sistem va avea soluția unică  $c_{00}, c_{10}, \dots, c_{N0}$ , astfel se determină acești  $N + 1$  coeficienți.

- din cea de a doua condiție inițială se obține:

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{N,M}(x, 0) = c_{01} + c_{11} \cdot x + c_{21} \cdot x^2 + \dots + c_{N1} \cdot x^N = fd_0(x). \quad (3.27)$$

Din nou impunând condiția ca relația să fie satisfăcută în fiecare nod corespunzător, se obține un sistem linear care va avea soluție unică  $c_{01}, c_{11}, \dots, c_{N1}$ .

Astfel funcționala  $\mathcal{J}$  din relația (3.25) este o funcție de  $c_{02}, c_{12}, \dots, c_{N2}; c_{03}, \dots, c_{N3}; \dots, c_{0M}, \dots, c_{NM}$  variabile reale care se vor determina în felul următor:

- Se minimizează funcționala (3.25) în raport cu fiecare din variabilele sale și se obțin coeficienții notați  $\tilde{c}_{02}, \tilde{c}_{12}, \dots, \tilde{c}_{N2}, \tilde{c}_{03}, \tilde{c}_{13}, \dots, \tilde{c}_{N3}, \dots, \tilde{c}_{0M}, \tilde{c}_{1M}, \dots, \tilde{c}_{NM}$ .

Aceștia sunt coeficienții cu ajutorul cărora se determină soluția polinomială de tipul (3.24).

Are loc următoarea teoremă de convergența :

**Teoremă 3.3.1.** *Șirul polinoamelor  $T_{N,M}(x, t)$  satisface proprietatea:*

$$\lim_{N, M \rightarrow \infty} \mathcal{R}(x_i, t_i, T_{N,M}(x_i, t_i)) = 0 \quad (3.28)$$

Astfel se obține soluția analitică aproximativă de tip polinomial, cu ajutorul metodei MAPMPDI.

În continuare sunt prezentate exemple numerice rezolvate în acest fel, exemple care se regăsesc și în articolul menționat la începutul acestei secțiuni.

*Exemplul 3.3.1.* Pentru ecuația neliniară, cu derivate parțiale, având derivată fracționară în raport cu timpul, se consideră problema:

$$\begin{cases} D_t^\alpha y(x, t) + y(x, t) \cdot \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) = x + x \cdot t^2, & 0 < \alpha \leq 1 \\ y(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

cu  $(x, t) \in D = [0, 1.5] \times [0, 1.5]$ .

Problema admite soluție unică, conform [80]. Ea fost rezolvată anterior în [80] folosindu-se metoda perturbarii omotopice (HPM) și în [85] cu metoda Adomian Decomposition.

În continuare se prezintă pașii metodei MAPMPDI aplicați pentru diferite valori ale lui  $\alpha$  (cazul întreg  $=1$  și cele fracționare  $0.5$  și  $0.75$ ).

### Cazul întreg $\alpha = 1$

Este cazul pentru care se cunoaște soluția exactă a problemei (3.29):

$$y(x, t) = x \cdot t.$$

Cum soluția este polinomială ca și în cazul exemplurilor prezentate anterior, rezultatul așteptat este, să fie găsită cu ajutorul MAPMPDI soluția exactă. Pentru aceasta se alege ca și domeniu  $D = [0, 1.5] \times [0, 1.5]$ , iar ca diviziune  $\Delta_1$  ( $i = j = 1$ ).

Se parcurg pașii descriși în prezentarea metodei MAPMPDI.

Astfel, se construiește soluția aproximativă de formă polinomială (polinom de grad doi):

$$\tilde{y}(x, t) = c_{00} + c_{10} \cdot x + c_{20} \cdot x^2 + c_{01} \cdot t + c_{02} \cdot t^2 + c_{11} \cdot x \cdot t.$$

Din condiția:  $y(x, 0) = 0$  se găsesc valorile coeficienților:  $c_{00} = 0$ ,  $c_{10} = 0$ ,  $c_{20} = 0$ , soluția aproximativă devenind:

$$\tilde{y}(x, t) = c_{01} \cdot t + c_{02} \cdot t^2 + c_{11} \cdot x \cdot t.$$

Se determină restul aferent problemei (3.29):

$$\mathcal{R}(x, t, \tilde{y}(x, t)) = c_{01} \cdot c_{11} \cdot t^2 + c_{01} + c_{02} \cdot c_{11} \cdot t^3 + 2 \cdot c_{02} \cdot t + c_{11}^2 \cdot t^2 \cdot x + c_{11} \cdot x - t^2 \cdot x - x.$$

Se atașează problemei (3.29) funcționala de tipul (3.25) corespunzătoare și se obține

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(c_{01}, c_{02}, c_{11}) &= c_{01}^2 + (c_{01} \cdot c_{11} + c_{01} + c_{02} \cdot c_{11} + 2 \cdot c_{02} + c_{11}^2 + c_{11} - 2)^2 + \\ &+ (c_{01} \cdot c_{11} + c_{01} + c_{02} \cdot c_{11} + 2 \cdot c_{02})^2 + (c_{01} + c_{11} - 1)^2 \end{aligned}$$

Se minimizează funcționala  $\mathcal{J}$  și se găsesc coeficienții astfel:  $c_{01} = 0$ ,  $c_{02} = 0$ ,  $c_{11} = 1$ . În acest fel soluția analitică aproximativă calculată cu ajutorul metodei MAPMPDI coincide cu soluția exactă :

$$\tilde{y}(x, t) = x \cdot t.$$

Cu cele doua metode cu care a mai fost rezolvată această problemă nu a fost determinată soluția exactă, ci doar soluții aproximative cu erori de cel puțin  $10^{-7}$ .

### Cazul fracționar $\alpha = 0.75$

Pentru acest caz nu se cunoaște soluția exactă a problemei, fiind menționate doar erorile calculate folosind diverse metode de aproximare în [80] și [85].

Parcurgând pașii descriși în algoritmul metodei MAPMPDI, pentru  $\alpha = 0.75$ , se determină soluția aproximativă:

$$\tilde{y}(x, t) = 0.18723135124 \cdot t - 0.18069828901 \cdot t^2 + 1.0082978876 \cdot t \cdot x.$$

Tabelul 3.1 prezintă pentru cazul  $\alpha = 0.75$  valoarea absolută a restului (3.18) corespunzător soluției aproximative calculată cu metoda MAPMPDI, față de soluția găsită cu ajutorul metodei perturbărilor omotopice (HPM) în [80] și cea obținută cu metoda Adomian Decomposition (ADM) în [85].

<b>x</b>	<b>t</b>	$\varepsilon_{ADM}$ [85]	$\varepsilon_{HPM}$ [80]	$\varepsilon_{MAPMPDI}$
0	0	0	0	0
0.25	0.25	$5.337 \cdot 10^{-3}$	$2.790 \cdot 10^{-2}$	$4.553 \cdot 10^{-2}$
0.5	0.5	$9.184 \cdot 10^{-2}$	$8.010 \cdot 10^{-2}$	$3.380 \cdot 10^{-2}$
0.75	0.75	$5.166 \cdot 10^{-1}$	$1.236 \cdot 10^{-1}$	$3.237 \cdot 10^{-2}$
1	1	1.810	1.505	$2.326 \cdot 10^{-2}$
1.25	1.25	4.667	5.845	$1.120 \cdot 10^{-2}$
1.5	1.5	8.981	$1.237 \cdot 10^{-1}$	$8.816 \cdot 10^{-2}$

Tabela 3.1: Resturile găsite prin metodele ADM, HPM și MAPMPDI când  $\alpha = 0.75$  pentru problema (3.29)

### Cazul fracționar $\alpha = 0.5$

Pentru cazul  $\alpha = 0.5$  cu ajutorul MAPMPDI se obține soluția analitică aproximativă:

$$\tilde{y}(x, t) = 0.38405380455 \cdot t - 0.40154287152 \cdot t^2 + 1.02931384449 \cdot x \cdot t.$$

## 3.4 Soluții aproximative pentru fluxul magnetohidrodinamic al unui nanofluid non-Newtonian într-un cilindru poros coaxial folosind MAPMPDI

Rezultatele obținute au fost publicate în: B.Căruntu, C. Bota, **M.S. Pașca**: *Approximate solutions for the magnetohydrodynamic flow of a non-Newtonian nanofluid in a coaxial porous cylinder using the Least Squares Differential Quadrature Method*, ICMA 2018 - The 15th International Conference on Mathematics and its Application, ISSN 1224 - 6069, pp54-63,[34] .

$\mathbf{x}$	$\mathbf{t}$	$\varepsilon_{ADM}$ [85]	$\varepsilon_{HPM}$ [80]	$\varepsilon_{MAPMPDI}$
0	0	0	0	0
0.25	0.25	$3.248 \cdot 10^{-2}$	$5.600 \cdot 10^{-2}$	$5.552 \cdot 10^{-2}$
0.5	0.5	$2.763 \cdot 10^{-1}$	$2.841 \cdot 10^{-1}$	$5.807 \cdot 10^{-2}$
0.75	0.75	1.030	$3.529 \cdot 10^{-1}$	$6.038 \cdot 10^{-2}$
1	1	2.626	$5.743 \cdot 10^{-1}$	$3.217 \cdot 10^{-2}$
1.25	1.25	4.919	4.031	$5.998 \cdot 10^{-2}$
1.5	1.5	5.827	9.241	$2.500 \cdot 10^{-1}$

Tabela 3.2: Comparație între resturile calculate pentru soluțiile determinate cu ADM, HPM și MAPMPDI în cazul  $\alpha = 0.5$  pentru problema (3.29)

Domeniul magnetohidrodinamicii a fost inițiat de Hannes Alfven, cel care a primit Premiul Nobel pentru Fizică în anul 1970 pentru cercetari în acest domeniu. Conceptul fundamental din spatele magnetohidrodinamicii este acela că într-un fluid conductor în mișcare câmpurile magnetice pot induce curenți, care, la rândul său, polarizează fluidul și schimbă reciproc câmpul magnetic în sine. Setul de ecuații care descriu MHD este o combinație a ecuațiilor Navier-Stokes ale dinamicii fluidelor și ecuațiile lui Maxwell ale electromagnetismului. Aceste ecuații diferențiale trebuie rezolvate simultan, fie analitic, fie numeric.

În ultimii ani, studiul nanofluidelor (fluide cu particule la scară nanometrică adăugate) a fost un subiect de mare interes pentru cercetătorii din întreaga lume, deoarece se pare că nanotehnologia va deveni una din forțele motrice ale următoarei revoluții industriale.

Pe baza manipulării structurii materiei la nivel molecular, nanotehnologia ar putea fi aplicată în oricare dintre domeniile majore ale științei și tehnologiei. De exemplu, studiul nanofluidelor non-newtoniene are aplicații în procesarea polimerilor, biomecanică, recuperarea îmbunătățită a uleiului, produse alimentare și multe altele.

Din păcate, ecuațiile folosite pentru modelarea fluxului unui nanofluid sunt relativ complicate și sunt de obicei rezolvate prin utilizarea metodelor numerice, necunoscându-se soluții analitice. Pentru a găsi soluții analitice, de-a lungul anilor s-au folosit diverse metode de aproximare, cu rate variate de succes, dintre care amintim: Metoda de descompunere Adomian, Metoda Perturbației Omotopiei, Metoda Iterației Variaționale, Metoda Asimptotică a Omotopiei Optimale. Deși toate aceste metode (și multe altele) au condus la soluții cu o eroare acceptabilă, datorită naturii ecuațiilor, calculele implicate sunt de obicei foarte complicate.

### 3.4.1 Modelul matematic ce descrie curgerea unui nanofluid non-Newtonian

Ellahi și colaboratorii în [45] prezintă modelarea matematică pentru un nanofluid non-newtonian pornind de la ecuațiile Navier Stokes. În modelul propus, următoarele trei ecuații arată conservarea masei totale, a impulsului, a energiei termice și a nanoparti-

culelor:

$$\rho_f (V'_t + V \cdot \nabla V) = \nabla \cdot T - \frac{\mu\varphi}{k} (V + \lambda_r V'_t) + g \left[ \phi \rho_p + (1 - \phi) \rho_f [1 - \beta_T (\theta - \theta_w)] \right] \quad (3.30)$$

$$(\rho c)_f (\theta'_t + V \cdot \nabla \theta) = k \cdot \nabla^2 \theta + (\rho c)_p [D_b \nabla \phi \cdot \nabla \theta + \frac{D_T}{\theta_w} \nabla \theta \cdot \nabla \theta], c = \quad (3.31)$$

$$(\phi'_t + V \cdot \nabla \phi) = D_b \cdot \nabla^2 \phi + \frac{D_T}{\theta_w} \nabla^2 \theta \quad (3.32)$$

cu condițiile la limită:

$$v(R_1) = v_0, \quad \theta(R_1) = \theta_w, \quad \phi(R_1) = \phi_w$$

$$v(R_2) = \gamma(v'(R_2)), \quad \theta(R_2) = 0, \quad \phi(R_2) = 0,$$

unde:  $V[0, 0, y(r)]$  este viteza,  $\theta$  este temperatura,  $\phi$  este fracția de volum a nanoparticulelor,  $\rho_f$  este densitatea fluidului de bază,  $\rho_p$  este densitatea nanoparticulelor,  $g$  este accelerația gravitațională,  $\mu$  este vâscozitatea,  $k$  - conductivitatea termică,  $c$  - o cantitate nondimensională,  $\beta_T$  este coeficientul volumetric de expansiune a nanofluidului, iar  $R_1$  și  $R_2$  sunt razele cilindrilor interior respectiv exterior,  $D_b$  coeficientul de difuzie brownian și  $D_T$  coeficientul de difuzie termoforetică .

Apoi, folosind tensori specifici ca tensorul de stres Cauchy, tensorii Rivlin-Ericksen cu constrângeri impuse de termodinamică se obțin: ecuații n-dimensionale care reflectă conservarea masei totale, a impulsului, a energiei termice și a nanoparticulelor, dată de Ellahi și colaboratorii în [45]:

$$\begin{aligned} \mu'(r)\nu'(r) + \frac{\mu}{r}\nu'(r) + \mu\nu''(r) + \frac{\Delta}{r}\nu'(r)^3 + 3\Delta\nu'(r)^2\nu''(r) - \\ - c - P\nu(r) - M^2\nu(r) + G_r\theta(r) + B_r\phi(r) = 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$N_b\theta'(r)\phi'(r) + \alpha_1 N_t\theta'(r)^2 + \alpha\theta''(r) + \frac{\theta'(r)}{r} = 0 \quad (3.34)$$

$$N_b \left( \theta''(r) + \frac{\theta'(r)}{r} \right) + N_t \left( \phi''(r) + \frac{\phi'(r)}{r} \right) = 0 \quad (3.35)$$

unde  $\nu, \theta, \phi$ , sunt viteza non-dimensională, temperatura, respectiv, fracția de volum a nanoparticulelor.

Condițiile la frontieră sunt:

$$\begin{aligned} \nu(R_1) = 1, \quad \theta(R_1) = 1, \quad \phi(R_1) = 1 \\ \nu(R_2) = \gamma \cdot \nu'(R_2), \quad \theta(R_2) = 0, \quad \phi(R_2) = 0 \end{aligned}$$

unde au fost utilizate următoarele notații  $P$ - parametru de porozitate,  $M$  - parametru magnetohidrodinamic,  $G_r$  - constanta de difuzie a termoforezei,  $B_r$  - constanta de difuzie browniană,  $N_b$  - parametrul de mișcare brownian,  $N_t$  - parametru de termoforeză și  $\gamma$  - parametru de alunecare.

În continuare se utilizează acest model matematic ce descrie curgerea unui nanofluid non-newtonian într-un mediu poros între doi cilindri coaxiali de rază  $r \in [R_1, R_2]$  propus de Ellahi în [45].

### 3.4.2 Rezultate numerice

Aplicând MAPMPDI pentru determinarea soluțiilor analitice aproximative, se parcurg următoarele etape:

- se consideră  $R_1 = 1, R_2 = 2$  (doar pentru acest caz existând în literatură soluții cu care se pot face comparații), pentru polinomul de aproximare se alege gradul 7 (având în vedere erorile urmarite a se obține), se consideră pasul  $h = 0.02$  pentru diviziunea domeniului  $D$ , unde  $r \in D = [R_1, R_2]$  și următoarele valori pentru parametrii:  $\mu = 1, \gamma = 0.05, P = 0.2, M = 0.5, N_t = 0.2, N_b = 0.15, G_r = 1, B_r = 1, \Delta = 1, c = 1, \alpha = 1, \alpha_1 = 1$ .

- se obțin aproximările:

$$\tilde{v}(r) = -0.5935 \cdot r^7 + 0.6011 \cdot r^6 + 0.6731 \cdot r^5 + 0.6312 \cdot r^4 + 0.4240 \cdot r^3 - 0.09541 \cdot r^2 - 0.09704 \cdot r - 0.54346;$$

$$\tilde{\theta}(r) = -0.15104 \cdot r^7 + 0.0913 \cdot r^6 + 0.2710 \cdot r^5 + 0.3654 \cdot r^4 - 0.2081 \cdot r^3 + 0.000013 \cdot r^2 - 0.0000733 \cdot r + 0.63134;$$

$$\tilde{\phi}(r) = -0.1041 \cdot r^7 + 0.1242 \cdot r^6 + 0.0736 \cdot r^5 + 0.05523 \cdot r^4 + 0.1849 \cdot r^3 + 0.0002329 \cdot r^2 - 0.001205 \cdot r + 0.6671.$$

Erorile obținute sunt reprezentate în graficele din Figura 3.4, Figura 3.5 și Figura 3.6.

Pentru  $\mathcal{R}_1$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1(r, \tilde{v}(r), \tilde{\theta}(r), \tilde{\phi}(r)) &= \mu'(r)\tilde{v}'(r) + \frac{\mu}{r}\tilde{v}'(r) + \mu\tilde{v}''(r) + \frac{\Delta}{r}\tilde{v}'(r)^3 + \\ &+ 3\Delta\tilde{v}'(r)^2\tilde{v}''(r) - c - P\tilde{v}(r) - M^2\tilde{v}(r) + G_r\tilde{\theta}(r) + B_r\tilde{\phi}(r) \end{aligned} \quad (3.36)$$

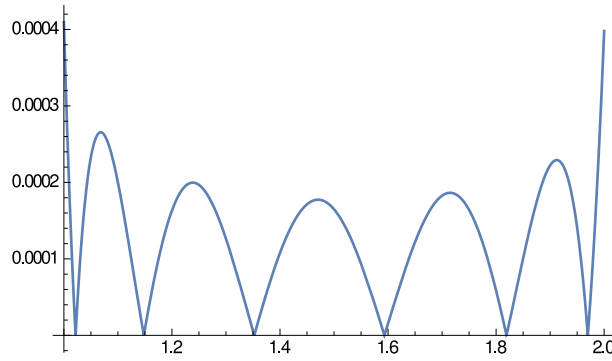


Figura 3.1: Eroarea  $\mathcal{R}_1$  obținută pentru modelul descris anterior

se observă astfel că erorile în acest caz sunt mai mici de  $4 \times 10^{-3}$ .

Pentru  $\mathcal{R}_2$ :

$$\mathcal{R}_2(r, \tilde{v}(r), \tilde{\theta}(r), \tilde{\phi}(r)) = N_b\tilde{\theta}'(r)\tilde{\phi}'(r) + \alpha_1 N_t\tilde{\theta}'(r)^2 + \alpha\tilde{\theta}''(r) + \frac{\tilde{\theta}'(r)}{r} \quad (3.37)$$

se obțin erori mai mici de  $1.2 \times 10^{-4}$ .

Pentru  $\mathcal{R}_3$ :

$$\mathcal{R}_3(r, \tilde{v}(r), \tilde{\theta}(r), \tilde{\phi}(r)) = N_b \left( \tilde{\theta}''(r) + \frac{\tilde{\theta}'(r)}{r} \right) + N_t \left( \tilde{\phi}''(r) + \frac{\tilde{\phi}'(r)}{r} \right) \quad (3.38)$$

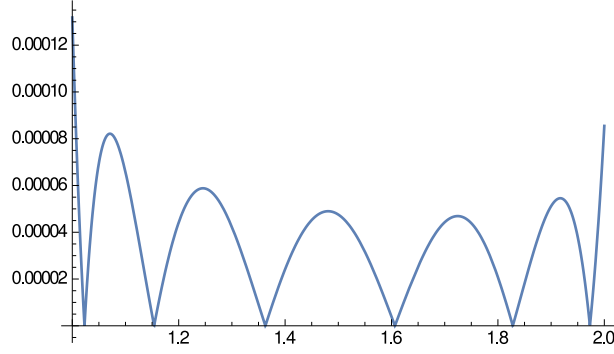


Figura 3.2: Eroarea  $\mathcal{R}_2$  obținută pentru modelul descris anterior

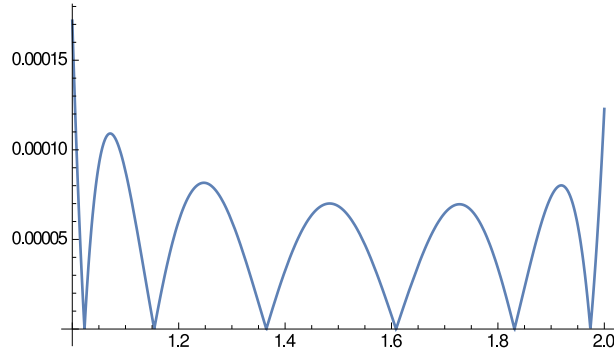


Figura 3.3: Eroarea  $\mathcal{R}_3$  obținută pentru modelul descris anterior

erorile sunt mai mici de  $1.5 \times 10^{-4}$  așa cum se poate observa și în Figura 2.6.

În timp ce acuratețea metodei este aproximativ aceeași ca și în cazul soluțiilor calculate anterior prin alte metode (metoda optimală a omotopiei asimptotice, metoda de analiză a omotopiei, metodele Runge-Kutta), metoda MAPMPDI este mai ușor de utilizat, toate aproximările fiind de tip polinomial.

### 3.5 MAPMPDI pentru sisteme de ecuații diferențiale

Multe probleme din știința aplicată sunt modelate matematic prin utilizarea sistemelor de ecuații diferențiale de ordin fracționar (FODE), cum ar fi, de exemplu, probleme de tip pradă-prădător [18], modelarea unor modele epidemiologice [92], modelarea unor explozii termice [81].

Se aplica MAPMPDI pentru următorul tip de sistem de ecuații diferențiale de ordin fracționar (FODE):

$$\begin{cases} D^{\alpha_1} x(t) = g_1(x^{\mu_1}(t), \dots, x(t), y^{\nu_1}(t), \dots, y(t)), \\ D^{\alpha_2} y(t) = g_2(x^{\mu_2}(t), \dots, x(t), y^{\nu_2}(t), \dots, y(t)), \\ 0 < \alpha_j \leq 1, j = \overline{1, 2} \end{cases} \quad (3.39)$$

cu condiții inițiale:

$$x(a) = \phi_1, \quad y(a) = \phi_2, \quad (3.40)$$

unde  $t \in [a, b]$  și  $D^{\alpha_j}$  sunt derivate fracționare în sens Caputo de ordin  $\alpha_j$ ,  $j = \overline{1, 2}$ ,  $g_j$  funcții continue,  $\mu_j, \nu_j \in \mathbb{N}$  și  $\phi_j$  constante reale.

### 3.5.1 Descrierea metodei

Pentru a obține o soluție polinomială analitică aproximativă pentru sistemul (3.39), se consideră o rețea numerică a intervalului  $I = [a, b]$  prin intermediul unei partiții (diviziuni)  $\Delta_M$  formată din  $M + 1$  puncte echidistante:

$$\Delta_M : a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{M-1} < t_M = b.$$

Sistemului (3.39) îi sunt atașati următorii operatori

$$\begin{cases} \mathcal{D}_1(x(t)) = D^{\alpha_1}x(t) - g_1(x^{\mu_1}(t), \dots, x(t), y^{\nu_1}(t), \dots, y(t)) \\ \mathcal{D}_2(y(t)) = D^{\alpha_2}y(t) - g_2(x^{\mu_2}(t), \dots, x(t), y^{\nu_2}(t), \dots, y(t)) \end{cases} \quad (3.41)$$

Se notează cu  $\tilde{x}$  și  $\tilde{y}$  o soluție aproximativă a sistemului (3.39) și se înlocuiesc în  $\mathcal{D}$  soluțiile exacte  $x$  și  $y$  cu aceste soluții aproximative. Se obțin astfel resturile

$$\begin{cases} \mathcal{R}_1(t, \tilde{x}(t)) = \mathcal{D}(\tilde{x}(t)) \\ \mathcal{R}_2(t, \tilde{y}(t)) = \mathcal{D}(\tilde{y}(t)), \quad t \in [a, b] \end{cases} \quad (3.42)$$

**Definiție 3.5.1.** Se numește o soluție  $\varepsilon$  - **aproximată** a sistemului (3.39) cu condiții inițiale (3.40) relativ la partiția  $\Delta_M$ , o soluție polinomială aproximativă care satisface următoarele relații:

$$\begin{cases} |\mathcal{R}_1(t_i, \tilde{x}(t_i))| < \varepsilon, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \\ |\mathcal{R}_2(t_i, \tilde{y}(t_i))| < \varepsilon, \quad i = \overline{0, M}, \\ \tilde{x}(a) = \phi_1, \quad \tilde{y}(a) = \phi_2. \end{cases} \quad (3.43)$$

**Definiție 3.5.2.** Se consideră șirurile de polinoame:

$$\begin{cases} P_N(t) = \sum_{k=0}^N d_k t^k, \quad d_k \in \mathbb{R} \\ Q_N(t) = \sum_{k=0}^N e_k t^k, \quad e_k \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{0, N} \end{cases} \quad (3.44)$$

Șirurile de polinoame  $P_N(t)$ ,  $Q_N(t)$  se numesc **convergente** la soluția sistemului (3.39) dacă au loc

$$\begin{cases} \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{D}_1(P_N(t)) = 0 \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{D}_2(Q_N(t)) = 0 \end{cases} \quad (3.45)$$

și sunt îndeplinite condițiile inițiale (3.40 )

Se construiesc soluții  $\varepsilon$  - aproximative de tip polinomial:

$$\begin{cases} T_N(t) = \sum_{k=0}^N \tilde{d}_k t^k, \\ U_N(t) = \sum_{k=0}^N \tilde{e}_k t^k, \end{cases} \quad (3.46)$$

care satisfac condițiile inițiale:  $T_N(a) = \phi_1$ ,  $U_N(a) = \phi_2$ .

Constantele  $\tilde{d}_k$  și  $\tilde{e}_k$  se obțin parcurgând etapele:



1. Din condițiile inițiale se obțin:

$\tilde{d}_0$ , respectiv  $\tilde{e}_0$  ca funcții de  $\tilde{d}_1, \tilde{d}_2 \cdots \tilde{d}_N$ , respectiv  $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \cdots \tilde{e}_N$ . Înlocuind acești doi coeficienți în expresia lui  $T_N(t)$  aceasta va fi doar funcție de  $\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \dots, \tilde{d}_N$ , iar  $U_N(t)$  doar funcție de  $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \cdots \tilde{e}_N$ .

2. Pentru sistemul (3.39) se atașează funcționala:

$$\mathcal{J}(d_1 \cdots d_N, e_1 \cdots e_N) = \sum_{i=0}^M (\mathcal{R}_1^2(t_i, T_N(t_i)) + \mathcal{R}_2^2(t_i, U_N(t_i))) \quad (3.47)$$

3. Se minimizează funcționala (3.47) în raport cu  $d_1 \cdots d_N, e_1 \cdots e_N$  și se obțin coeficienții  $\tilde{d}_1, \tilde{d}_2 \cdots \tilde{d}_N$  și  $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_N$  care conduc la minimul lui  $\mathcal{J}$ .

4. Se înlocuiesc coeficienții  $\tilde{d}_1, \tilde{d}_2 \cdots \tilde{d}_N$  și  $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_N$  astfel calculați, în (3.46)

și se notează cu  $T_N^0(t) = \sum_{k=0}^N \tilde{d}_k t^k$ , respectiv  $U_N^0(t) = \sum_{k=0}^N \tilde{e}_k t^k$  noile polinoame.

Acestea vor fi soluțiile polinomiale aproximative analitice obținute cu ajutorul metodei MAPMPDI, ale sistemului (3.39) cu condiții inițiale (3.40),

Are loc următoarea teoremă de convergență:

**Teoremă 3.5.1.** *Sirurile de polinoame  $T_N^0(t)$  și  $U_N^0(t)$  satisfac relațiile:*

$$\begin{cases} \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{R}_1^2(t_i, T_N^0(t_i)) = 0, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{R}_2^2(t_i, U_N^0(t_i)) = 0, \end{cases} \quad i = \overline{0, M}, \quad (3.48)$$

În acest fel se obțin polinoamele  $T_N^0(t_i)$  și  $U_N^0(t_i)$  care aproximează soluțiile sistemului (3.39) împreună cu condițiile inițiale (3.40).

*Exemplul 3.5.1.* Se consideră sistemul de ecuații diferențiale fracționare neliniare de tipul [97]:

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = \frac{1}{2}x(t) \\ D^\beta y(t) = x^2(t) + y(t) \end{cases} \quad t \in [0, 1]; \quad 0 < \alpha, \beta \leq 1 \quad (3.49)$$

împreună cu condițiile inițiale:

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0 \quad (3.50)$$

Soluțiile exacte pentru ordinul întreg  $\alpha = \beta = 1$  (în literatură fiind menționate doar soluții numerice, nu soluții analitice pentru cazul fracționar) sunt conform [97]:

$$x(t) = e^{\frac{t}{2}}, \quad y(t) = t \cdot e^t.$$

Urmând pașii descriși în paragraful anterior, pentru a aplica MAPMPDI se consideră o partiție  $\Delta_{M=100}$ , cu puncte echidistante:  $t_i = t_{i-1} + h$ , unde  $h = 1/100$ ,  $i = \overline{1, 100}$  și se calculează pentru sistemul (3.49) soluții polinomiale analitice aproximative de tipul (3.46) (aproximarea fiind făcută cu polinom de grad 5):

$$\begin{cases} T_5(t) = d_0 + d_1 t^1 + d_2 t^2 + d_3 t^3 + d_4 t^4 + d_5 t^5, \\ U_5(t) = e_0 + e_1 t^1 + e_2 t^2 + e_3 t^3 + e_4 t^4 + e_5 t^5. \end{cases}$$

Din condițiile inițiale:  $T_5(0) = 1, U_5(0) = 0$ , se obțin  $d_0 = 1$  și  $e_0 = 0$ .  
Astfel polinoamele de aproximare devin:

$$\begin{cases} T_5(t) = 1 + d_1t^1 + d_2t^2 + d_3t^3 + d_4t^4 + d_5t^5, \\ U_5(t) = e_1t^1 + e_2t^2 + e_3t^3 + e_4t^4 + e_5t^5. \end{cases}$$

Resturile corespunzătoare de tip (3.42) în acest caz sunt  $\mathcal{R}_1(t, T_5(t)); \mathcal{R}_2(t, U_5(t))$ , iar funcționala  $\mathcal{J}$  (3.47) este

$$\mathcal{J}(d_1 \cdots d_5, e_1, \cdots e_5) = \sum_{i=0}^{100} (\mathcal{R}_1^2(t_i, T_5(t_i)) + \mathcal{R}_2^2(t_i, U_5(t_i))).$$

Se minimizează funcționala  $\mathcal{J}(\tilde{d}_1, \cdots, \tilde{d}_5, \tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_5)$  în raport cu toate variabilele sale și se obțin  $\tilde{d}_1, \cdots, \tilde{d}_5$  și  $\tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_5$ .

Înlocuind aceste valori în ultima expresie a polinoamelor  $T_5(t)$  și  $U_5(t)$  se obține soluția analitică aproximativă a sistemului (3.49) cu condițiile inițiale (3.50) prin MAPMPDI ca fiind:

$$\begin{cases} \tilde{x}(t) = -0.000251813t^5 + 0.00394372t^4 + 0.0197043t^3 \\ \quad + 0.125357t^2 + 0.499968t + 1 \\ \tilde{y}(t) = 0.0767594t^5 + 0.123633t^4 + 0.522425t^3 \\ \quad + 0.995159t^2 + 1.0003t. \end{cases}$$

În Figura 3.4 este prezentat graficul pentru eroarea obținută pentru aproximarea cu polinom de grad cinci pentru soluția  $\tilde{x}$ , iar în Figura 3.5 cea pentru  $\tilde{y}$  având  $t \in [0, 1]$ .

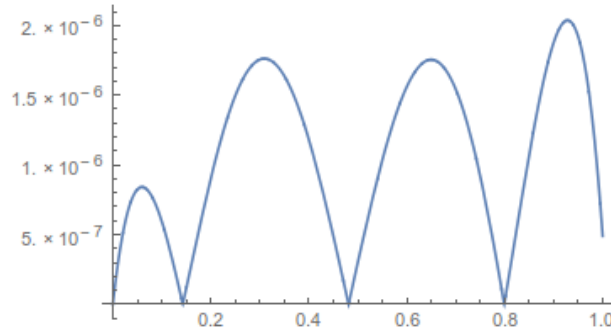


Figura 3.4: Eroarea absolută corespunzătoare soluției  $\tilde{x}$ , pentru cazul  $\alpha = 1$  în Exemplul 3.5.1

În Tabelele 3.3 și 3.4 sunt prezentate comparațiile între soluțiile  $\tilde{x}$  și  $\tilde{y}$  obținute cu ajutorul metodei MAPMPDI și soluțiile obținute în [36] folosind metoda de descompunere naturală fracționară MDNF.

Cele două tabele ilustrează și convergența metodei deoarece erorile scad odată cu creșterea gradului polinomului de aproximare.

Pentru cazul fracționar, în literatură sunt amintite doar soluții numerice. Aplicând MAPMPDI se obțin expresii analitice pentru soluții aproximative și în cazurile fracționare.

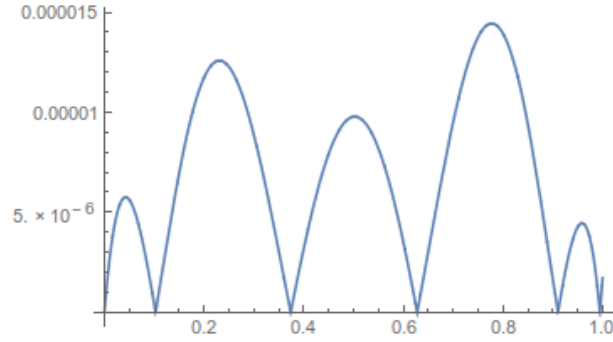


Figura 3.5: Eroarea absolută corespunzătoare soluției  $\tilde{y}$ , pentru cazul  $\beta = 1$  în Exemplul 3.5.1

t	$\varepsilon_{MDNF}$ [36]	$\varepsilon_{MAPMPDI}$ gr. 4	$\varepsilon_{MAPMPDI}$ gr. 5	$\varepsilon_{MAPMPDI}$ gr. 6
0.1	—	$2.9 \times 10^{-5}$	$9.9 \times 10^{-7}$	$1.8 \times 10^{-8}$
0.2	—	$1.5 \times 10^{-5}$	$3.6 \times 10^{-7}$	$3.3 \times 10^{-8}$
0.3	—	$1.3 \times 10^{-5}$	$1.2 \times 10^{-6}$	$1.4 \times 10^{-8}$
0.4	—	$3.7 \times 10^{-5}$	$7.7 \times 10^{-7}$	$4.2 \times 10^{-8}$
0.5	$5.4 \times 10^{-6}$	$4.2 \times 10^{-5}$	$6.2 \times 10^{-7}$	$6.6 \times 10^{-8}$
0.6	—	$2.6 \times 10^{-5}$	$1.8 \times 10^{-6}$	$2.8 \times 10^{-8}$
0.7	—	$5.7 \times 10^{-6}$	$1.9 \times 10^{-6}$	$3.2 \times 10^{-8}$
0.8	—	$3.9 \times 10^{-5}$	$5.2 \times 10^{-7}$	$4.1 \times 10^{-8}$
0.9	—	$4.9 \times 10^{-5}$	$1.2 \times 10^{-6}$	$3.3 \times 10^{-8}$
1	$2.8 \times 10^{-4}$	$9.2 \times 10^{-7}$	$8.9 \times 10^{-8}$	$2.4 \times 10^{-8}$

Tabela 3.3: Comparații între erorile absolute pentru  $\tilde{x}$  cazul  $\alpha = 1$

**Cazul  $0 < \alpha \leq 1$  și  $0 < \beta \leq 1$ :**

Folosind metoda MAPMPDI se obține o soluție analitică aproximativă pentru acest sistem de forma:

- pentru  $\alpha = \beta = 0.9$  (utilizând polinom de grad cinci pentru aproximare):

$$\tilde{x}(t) = 0.359051t^5 - 1.04143t^4 + 1.16071t^3 - 0.486334t^2 + 0.711321t + 1;$$

$$\tilde{y}(t) = 0.559913t^5 - 1.26583t^4 + 2.20545t^3 + 0.403903t^2 + 1.43562t.$$

- pentru  $\alpha = \beta = 0.75$ :

$$\tilde{x}(t) = 1.51023t^5 - 4.30467t^4 + 4.59699t^3 - 2.20365t^2 + 1.19273t + 1;$$

$$\tilde{y}(t) = 1.90099t^5 - 5.13967t^4 + 6.73316t^3 - 1.27218t^2 + 2.48204t.$$

- pentru  $\alpha = \beta = 0.6$ :

$$\tilde{x}(t) = 3.97221t^5 - 11.1522t^4 + 11.6223t^3 - 5.53977t^2 + 1.98438t + 1;$$

$$\tilde{y}(t) = 4.64414t^5 - 13.1133t^4 + 15.8298t^3 - 4.81595t^2 + 4.44679t.$$

t	$\varepsilon_{MDNF}$ [36]	$\varepsilon_{MAPMPDI}$ gr. 4	$\varepsilon_{MAPMPDI}$ gr. 5	$\varepsilon_{MAPMPDI}$ gr. 6
0.1	—	$1.7 \times 10^{-4}$	$5.2 \times 10^{-6}$	$4.1 \times 10^{-8}$
0.2	—	$1.7 \times 10^{-5}$	$6.6 \times 10^{-6}$	$2.3 \times 10^{-7}$
0.3	—	$1.7 \times 10^{-4}$	$4.7 \times 10^{-6}$	$3.0 \times 10^{-7}$
0.4	—	$1.4 \times 10^{-4}$	$6.9 \times 10^{-6}$	$5.8 \times 10^{-7}$
0.5	$5.0 \times 10^{-4}$	$2.8 \times 10^{-5}$	$1.4 \times 10^{-5}$	$1.9 \times 10^{-7}$
0.6	—	$2.6 \times 10^{-4}$	$9.1 \times 10^{-6}$	$2.6 \times 10^{-7}$
0.7	—	$2.9 \times 10^{-4}$	$2.7 \times 10^{-6}$	$7.0 \times 10^{-8}$
0.8	—	$1.5 \times 10^{-4}$	$6.9 \times 10^{-6}$	$5.2 \times 10^{-7}$
0.9	—	$7.1 \times 10^{-5}$	$5.1 \times 10^{-6}$	$3.8 \times 10^{-7}$
1	$2.0 \times 10^{-2}$	$3.7 \times 10^{-5}$	$5.7 \times 10^{-6}$	$1.4 \times 10^{-7}$

Tabela 3.4: Comparații între erorile absolute pentru  $\tilde{y}$  cazul  $\beta = 1$

### 3.6 MAPMPDI pentru probleme neliniare cu transfer de căldură

Se utilizează aceeași metodă, MAPMPDI, pentru determinarea soluțiilor analitice și în cazul problemelor neliniare cu transfer de căldură.

Se consideră o problemă formată dintr-o ecuație diferențială neliniară de ordin  $n \in \mathbb{N}$ :

$$y^{(n)}(x) = F(y^{(n-1)}(x), y^{(n-2)}(x), \dots, y^{(1)}(x), y(x), x) \quad (3.51)$$

unde  $F$  este funcție reală continuă,  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y$  absolut continuă pe intervalul  $[a, b]$  și condițiile:

$$\begin{aligned} & d_{1i}y^{(n-1)}(a) + d_{2i}y^{(n-1)}(b) + d_{3i}y^{(n-2)}(a) + d_{4i}y^{(n-2)}(b) + \dots + \\ & d_{(2n-3)i}y^{(1)}(a) + d_{(2n-2)i}y^{(1)}(b) + d_{(2n-1)i}y(a) + d_{2ni}y(b) = \mu_{1i}, \quad i = \overline{1, n} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Se construiește o diviziune a intervalului  $I = [a, b]$  notată  $\Delta_M$  formată din  $M + 1$  puncte echidistante:  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{M-1} < x_M = b$ .

Ecuației (3.51) îi este atașat operatorul:

$$\mathcal{D}(y(x)) = y^{(n)}(x) - F(y^{(n-1)}(x), y^{(n-2)}(x), \dots, y^{(1)}(x), y(x), x). \quad (3.53)$$

Se construiește o soluție aproximativă, notată  $\tilde{y}$  pentru ecuația (3.51). Înlocuind soluția exactă cu soluția aproximativă se va obține eroarea (restul) de forma:

$$\mathcal{R}(x, \tilde{y}(x)) = \mathcal{D}(\tilde{y}(x)), \quad x \in [a, b]. \quad (3.54)$$

**Definiție 3.6.1.** Numim o soluție  $\varepsilon$  **aproximativă** a problemei (3.51 - 3.52) relativ la diviziunea  $\Delta_M$ , o soluție aproximativă de tip polinomial care satisface relațiile:

$$\mathcal{R}(x_i, \tilde{y}(x_i)) < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad i = \overline{0, M}, \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} & d_{1i}\tilde{y}^{(n-1)}(a) + d_{2i}\tilde{y}^{(n-1)}(b) + d_{3i}\tilde{y}^{(n-2)}(a) + d_{4i}\tilde{y}^{(n-2)}(b) + \dots + \\ & d_{(2n-3)i}\tilde{y}^{(1)}(a) + d_{(2n-2)i}\tilde{y}^{(1)}(b) + d_{(2n-1)i}\tilde{y}(a) + d_{2ni}\tilde{y}(b) = \mu_{1i}, \quad i = \overline{1, n} \end{aligned} \quad (3.56)$$

**Definiție 3.6.2.** Fie șirul de polinoame:

$$P_N(x) = \sum_{k=0}^N c_k x^k, \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{0, N}. \quad (3.57)$$

Numim șirul  $P_N(x)$  convergent la soluția problemei (3.51 - 3.52) dacă are loc

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{D}(P_N(x)) = 0. \quad (3.58)$$

Urmând algoritmul din descrierea metodei MAPMPDI se compune o soluție aproximativă de tip polinomial:

$$T_N(x) = \sum_{k=0}^N \tilde{c}_k x^k, \quad (3.59)$$

care verifică în plus condițiile:

$$d_{1i} T_N^{(n-1)}(a) + d_{2i} T_N^{(n-1)}(b) + \dots + d_{(2n-1)i} T_N(a) + d_{2ni} T_N(b) = \mu_{1i}, \quad i = \overline{1, n} \quad (3.60)$$

Coeficienții  $\tilde{c}_k$  se vor calcula așa cum a fost descris în paragraful 2 al acestui capitol  
- din condițiile la frontieră se obțin  $\tilde{c}_0$  și  $\tilde{c}_1$  ca funcții de  $\tilde{c}_2, \tilde{c}_3 \dots \tilde{c}_N$  și astfel polinomul  $T_N(x)$  va depinde doar de  $\tilde{c}_2, \tilde{c}_3, \dots, \tilde{c}_N$ .

- problemei (3.51 - 3.52) îi este atașată funcționala:

$$\mathcal{J}(c_2, c_3, \dots, c_N) = \sum_{i=0}^M \mathcal{R}^2(x_i, T_N(x_i)). \quad (3.61)$$

- se minimizează această funcțională în raport cu toate variabilele sale și se obțin coeficienții notați cu  $\tilde{c}_2, \tilde{c}_3, \dots, \tilde{c}_N$

- cu ajutorul coeficienților  $\tilde{c}_2, \tilde{c}_3 \dots \tilde{c}_N$  astfel obținuți, polinomul de tipul (2.79) notat cu  $T_N^0(x) = \sum_{k=0}^N \tilde{c}_k x^k$ , reprezintă soluția analitică aproximativă de tip polinomial determinată cu ajutorul metodei MAPMPDI pentru problema (3.51 - 3.52).

Are loc de asemenea următoarea teoremă de convergență:

**Teoremă 3.6.1.** Șirul de polinoame  $T_N^0(x)$  satisface relația:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{R}^2(x_i, T_N^0(x_i)) = 0, \quad i = \overline{0, M}. \quad (3.62)$$

*Exemplul 3.6.1.* Se consideră un sistem concentrat de transfer de căldură combinat convectiv-radiativ. Coeficientul de căldură specific este o funcție liniară [22],[25],[7]:

$$c = c_a(1 + \gamma(T - T_a))$$

unde  $\gamma$  este o constantă reală, iar  $c_a$  este temperatura specifică la  $T_a$ .

Procesul de răcire al sistemului este descris de ecuația:

$$\rho V c \frac{dT}{d\tau} + hA(T - T_a) + E\sigma A(T^4 - T_s^4) = 0, \quad T(0) = T_i$$

Efectuând următoarele schimbări de variabile:

$y = \frac{T}{T_i}, \quad y_a = \frac{T_a}{T_i}, \quad x = \frac{\tau(hA)}{\rho V c_a}, \quad \varepsilon_1 = \gamma T_i, \quad \varepsilon_2 = \frac{E\sigma T_i^3}{h}, \quad y_s = \frac{T_s}{T_i}$  și  $y_a = y_s = 0$   
se obține următoarea problemă:

$$y'(x)(1 + \varepsilon_1 y(x)) + y(x) + \varepsilon_2 y^4(x) = 0, \quad y(0) = 1 \quad (3.63)$$

**Cazul 1:**  $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 1$

Se parcurge algoritmul descris pentru metoda MAPMPDI, și se calculează următoarele soluții aproximative pentru problema (3.63) :

- aproximare cu polinom de grad trei:

$$\tilde{y}(x) = -0.229672x^3 + 0.646583x^2 - 0.968634x + 1;$$

- aproximare cu polinom de grad șase:

$$\tilde{y}(x) = 0.141072x^6 - 0.580724x^5 + 1.0409x^4 - 1.13478x^3 + 0.980631x^2 - 0.99987x + 1;$$

- aproximare cu polinom de grad opt:

$$\tilde{y}(x) = 0.104895x^8 - 0.536881x^7 + 1.21968x^6 - 1.6701x^5 + 1.62301x^4 - 1.29063x^3 + 0.9973x^2 - 0.999999x + 1.$$

Deoarece ecuația (3.63) nu are soluție exactă cunoscută, se calculează pentru fiecare soluție aproximativă eroarea relativă ca diferență (în valoare absolută) între soluția aproximativă și o soluția numerică determinată cu ajutorul softurilor matematice.

Tabelul 3.5 prezintă comparația dintre erorile soluțiilor obținute prin diverse metode de aproximare existente în literatură și cea ce se obține prin aplicarea MAPMPDI.

x	$\varepsilon_{HPM}$ [25]	$\varepsilon_{HAM}$ [123]	$\varepsilon_{SRMM}$ [22] gr.3	$\varepsilon_{MAPMPDI}$ gr.3	$\varepsilon_{MA..}$ gr.6	$\varepsilon_{MA..}$ gr.8
0.1	1.2092	$1.866 \times 10^{-2}$	$1.704 \times 10^{-3}$	$5.389 \times 10^{-4}$	$5.073 \times 10^{-5}$	$4.497 \times 10^{-6}$
0.2	$7.247 \times 10^{-1}$	$5.821 \times 10^{-3}$	$4.66 \times 10^{-4}$	$1.403 \times 10^{-3}$	$4.131 \times 10^{-5}$	$2.084 \times 10^{-6}$
0.3	$4.276 \times 10^{-1}$	$6.186 \times 10^{-3}$	$1.193 \times 10^{-3}$	$3.378 \times 10^{-3}$	$8.371 \times 10^{-7}$	$2.229 \times 10^{-6}$
0.4	$2.472 \times 10^{-1}$	$1.709 \times 10^{-2}$	$2.129 \times 10^{-3}$	$4.302 \times 10^{-3}$	$2.565 \times 10^{-6}$	$3.119 \times 10^{-6}$
0.5	$1.389 \times 10^{-1}$	$2.68 \times 10^{-2}$	$1.995 \times 10^{-3}$	$3.898 \times 10^{-3}$	$2.9513 \times 10^{-6}$	$1.682 \times 10^{-6}$
0.6	$7.495 \times 10^{-2}$	$3.528 \times 10^{-2}$	$9.44 \times 10^{-4}$	$2.385 \times 10^{-3}$	$4.653 \times 10^{-5}$	$9.547 \times 10^{-7}$
0.7	$3.818 \times 10^{-2}$	$4.253 \times 10^{-2}$	$5.48 \times 10^{-4}$	$3.062 \times 10^{-4}$	$2.287 \times 10^{-5}$	$2.216 \times 10^{-6}$
0.8	$1.78 \times 10^{-2}$	$4.857 \times 10^{-2}$	$1.78 \times 10^{-3}$	$1.578 \times 10^{-3}$	$1.071 \times 10^{-5}$	$1.898 \times 10^{-6}$
0.9	$7.303 \times 10^{-2}$	$5.345 \times 10^{-2}$	$1.93 \times 10^{-3}$	$2.355 \times 10^{-3}$	$2.980 \times 10^{-6}$	$4.789 \times 10^{-7}$

Tabela 3.5: Comparații între erorile soluțiilor obținute aplicând HPM, HAM, SRMM și MAPMPDI pentru cazul  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$

**Cazul 2:**  $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 0$

Folosind MAPMPDI am calculat următoarea soluție aproximativă polinomială de ordinul doi pentru ecuația (3.63):  $\tilde{y}(x) = 0.068967x^2 - 0.50167x + 1$ .

Ca și în cazul 1, am comparat soluția obținută aplicând MAPMPDI cu soluțiile anterioare: *HPM* obținută de Ganji în [62], *HAM* obținută de Abbasbandy în [63], *OHAM* de Marinca și Herișanu în [51] și *SRMM* de Căruntu și Bota în [22]. Comparațiile erorilor în valoare absolută sunt cuprinse în Tabelul 3.6

x	$\varepsilon_{HPM}$ [62]	$\varepsilon_{HAM}$ [63]	$\varepsilon_{OHAM}$ [51]	$\varepsilon_{SRMM}$ [22] gr.2	$\varepsilon_{MAPMPDI}$ gr.2
0.1	$3.350 \times 10^{-2}$	$3.672 \times 10^{-5}$	$3.708 \times 10^{-2}$	$1.561 \times 10^{-3}$	$1.076 \times 10^{-4}$
0.2	$4.345 \times 10^{-2}$	$1.954 \times 10^{-3}$	$5.366 \times 10^{-2}$	$8.024 \times 10^{-5}$	$1.167 \times 10^{-4}$
0.3	$4.029 \times 10^{-2}$	$4.091 \times 10^{-3}$	$5.658 \times 10^{-2}$	$1.138 \times 10^{-3}$	$5.698 \times 10^{-5}$
0.4	$3.071 \times 10^{-2}$	$5.415 \times 10^{-3}$	$5.113 \times 10^{-2}$	$1.669 \times 10^{-3}$	$4.325 \times 10^{-5}$
0.5	$1.886 \times 10^{-2}$	$5.541 \times 10^{-3}$	$4.118 \times 10^{-2}$	$1.730 \times 10^{-3}$	$1.571 \times 10^{-4}$
0.6	$7.170 \times 10^{-3}$	$4.432 \times 10^{-3}$	$2.942 \times 10^{-2}$	$1.379 \times 10^{-3}$	$2.600 \times 10^{-4}$
0.7	$3.062 \times 10^{-3}$	$2.243 \times 10^{-3}$	$1.762 \times 10^{-2}$	$6.736 \times 10^{-4}$	$3.292 \times 10^{-4}$
0.8	$1.125 \times 10^{-2}$	$7.827 \times 10^{-4}$	$6.855 \times 10^{-3}$	$3.304 \times 10^{-4}$	$3.449 \times 10^{-4}$
0.9	$1.726 \times 10^{-2}$	$4.372 \times 10^{-3}$	$2.320 \times 10^{-3}$	$1.575 \times 10^{-3}$	$2.903 \times 10^{-4}$

Tabela 3.6: Comparații între erorile soluțiilor obținute aplicând HPM, HAM, OHAM, SRMM și MAPMPDI pentru cazul  $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 0$

### 3.7 MAPMPDI pentru ecuații diferențiale Riccati de ordin fracționar

În această secțiune se determină soluții analitice aproximative cu ajutorul metode MAPMPDI pentru ecuații diferențiale Riccati de ordin fracționar de tipul:

$$D^\alpha y(x) - A(x)y^2(x) - B(x)y(x) = f(x), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad x \in [0, 1], \quad (3.64)$$

care verifică o condiție inițială

$$y(0) = k, \quad (3.65)$$

unde  $A, B$  și  $C$  sunt funcții reale date,  $y$  o funcție absolut continuă pe intervalul  $[0, 1]$ ,  $k$  este o constantă reală dată, iar  $D^\alpha y$  este derivata fracționară de ordinul  $\alpha$  în sens Caputo.

Ecuația diferențială Riccati de ordin fracționar, cu aplicabilitate în probleme de control optimal, a fost studiată atât numeric, cât și analitic în numeroase articole științifice.

Parcurgând algoritmul prezentat în descrierea metodei MAPMPDI sunt determinate soluții analitice aproximative, de tip polinomial și pentru acest tip de ecuații. În secțiunea următoare se prezintă câteva dintre exemplele numerice calculate ,

*Exemplul 3.7.1.* În ecuația (3.64) se consideră  $A(x) = x^3, B(x) = -2x^4, f(x) = x^5 + 1$  și  $k = 0$  se obține problema [108]

$$\begin{cases} D^\alpha y(x) - x^3 y^2(x) + 2x^4 y(x) = x^5 + 1 \\ y(0) = 0, \end{cases} \quad \text{cu } x \in [0, 1]; \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (3.66)$$

**Cazul întreg  $\alpha = 1$  :**

pentru care se cunoaște soluția exactă  $y(x) = x$  [108].

Pentru aplicarea metodei MAPMPDI se compune o soluție aproximativă de tip polinomial (3.9):

$$P_1(x) = d_0 + d_1 \cdot x.$$

Din condiția inițială  $P_1(0) = 0$ , se obține  $d_0 = 0$ , iar soluția aproximativă devine

$$P_1(x) = d_1 \cdot x$$

Restul corespunzător de tip (3.5) devine în acest caz :

$$\mathcal{R}(x, P_1(x)) = -d_1^2 x^5 + 2d_1 x^5 + d_1 - x^5 - 1$$

iar funcționala  $\mathcal{F}$  (3.11) este:

$$\mathcal{F}(d_1) = d_1^4 - 6d_1^3 + 13d_1^2 - 12d_1 + 4.$$

Se minimizează funcționala  $\mathcal{F}$ . Se determină mai întâi punctele critice ca soluții ale ecuației  $\mathcal{F}'(d_1) = 0$ , iar valoarea minimă care se obține este  $d_1 = 1$ . Astfel se obține soluția exactă a problemei:  $\tilde{y}(x) = x$ .

### Cazul fracționar $0 < \alpha \leq 1$ :

Urmând algoritmul metodei MAPMPDI, se calculează următoarele soluții aproximative de tip polinom de gradul întâi pentru problema (3.66), considerând diverse valori pentru  $\alpha \in (0, 1)$ :

- pentru  $\alpha = 0.9$ :  $\tilde{y}(x) = 0.95341x$ ;
- pentru  $\alpha = 0.8$ :  $\tilde{y}(x) = 0.92353x$ ;
- pentru  $\alpha = 0.7$ :  $\tilde{y}(x) = 0.90548x$ ;

## 3.8 Comentarii bibliografice

În acest capitol este descrisă Metoda de aproximare polinomială în sensul celor mai mici pătrate aplicată unei diviziuni a intervalului de definiție.

De asemenea, este ilustrată utilitatea metodei prin aplicarea sa în determinarea soluțiilor pentru ecuații Bagley-Torvik, Lane-Emden, Riccati, probleme de control optimal și în cazul curgerii unui fluid ne-newtonian. Metoda a fost prezentată în 2018 în cadrul conferinței ICCMA din noiembrie 2018. Rezultatele originale au apărut publicate în articolul [91]. Teoremele 3.1.1 și 3.1.2 au fost publicate în 2020 în articolul [19], Teorema 3.3.1 a fost publicată în articolul [20], Teorema 3.5.1 a fost prezentată în cadrul conferinței EHB 2021 și a apărut publicată în [88], iar Teorema 3.6.1 a fost publicată în [90]. În fiecare din lucrările menționate se prezintă utilitatea metodei în obținerea soluțiilor aproximative analitice pentru ecuații diferențiale fracționare de tip Lane-Emden, Bagley-Torvik sau Riccati. Fiecare din lucrările amintite au fost citate în jurnale de specialitate interne sau internaționale.



# Capitolul 4

## Metoda perturbațiilor omotopice în sensul celor mai mici pătrate

### Metoda perturbării omotopiei

Determinarea soluțiilor (rezolvarea) ecuațiilor diferențiale, a ecuațiilor cu derivate parțiale și a ecuațiilor diferențiale fracționare a preocupat mereu cercetătorii, motiv pentru care au fost dezvoltate diferite metode care au dus la obținerea de soluții, în foarte puține cazuri exacte, dar în general au condus la găsirea de soluții aproximative (numerice, uneori analitice).

Se consideră ecuația diferențială neliniară de forma:

$$A(u) - f(r) = 0, r \in \Omega \quad (4.1)$$

împreună cu condiții  $B\left(u, \frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0, r \in \Gamma$ , unde  $A$  este un operator diferențial general,  $B$  este un operator la frontieră,  $f$  o funcție cunoscută, iar  $\Gamma$  este frontiera domeniului  $\Omega$ .

În anul 2000, J-H He propune o nouă metodă de determinare a soluției pentru aceste tipuri de probleme, numită Homotopy Perturbation Method (HPM) [54], [53], [51], [49], în care etapele parcurse sunt următoarele:

- ecuația (4.1) se rescrie sub forma

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0, r \in \Omega \quad (4.2)$$

unde  $L(u)$  este partea liniară, iar  $N(u)$  partea neliniară a lui  $A(u)$ .

- se introduce un "parametru artificial"  $p$  și se obține ecuația perturbată

$$L(u) + p \cdot N(u) - f(r) = 0$$

- se dezvoltă "u" în serie de puteri

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + \dots$$

dacă  $p \rightarrow 1$  ecuațiile (4.1) și (4.2) coincid, iar  $u$  este soluție a ecuației date.

Metoda HPM propusă de He în anul 2000 a stat la baza a numeroase metode de determinare a soluțiilor aproximative pentru diverse tipuri de ecuații diferențiale.

În acest capitol se are ca punct de plecare HPM pentru o nouă metodă numită metoda perturbațiilor omotopice în sensul celor mai mici pătrate.

## 4.1 Descrierea metodei perturbațiilor omotopice în sensul celor mai mici pătrate - (MPOMP)

În acest paragraf, este prezentată metoda perturbațiilor omotopice în sensul celor mai mici pătrate (MPOMP). Aplicația numerică din secțiunea următoare conține un sistem format din două ecuații, dar metoda MPOMP poate fi generalizată pentru sisteme care constau din atâtea ecuații cât este necesar.

Se descrie mai jos metoda perturbațiilor omotopice în sensul celor mai mici pătrate și se determină cu ajutorul său soluția sistemului:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1(U(y), V(y)) + \mathcal{N}_1(U(y), V(y)) - f_1(y) &= 0, \\ \mathcal{L}_2(U(y), V(y)) + \mathcal{N}_2(U(y), V(y)) - f_2(y) &= 0, \\ \mathcal{B}_i(U(y)) = 0, \mathcal{B}_j(V(y)) = 0, \quad i = \overline{1, n1} \quad j = \overline{1, n2}, \quad y \in I \subset \mathbb{R}\end{aligned}\tag{4.3}$$

unde  $U$  și  $V$  sunt funcții necunoscute,  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$  sunt operatori liniari,  $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$  sunt operatori neliniari, iar  $\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j$  sunt operatori la frontieră.

Se consideră  $\tilde{U}$  și  $\tilde{V}$  soluțiile aproximative ale sistemului (4.3).

Erorile (resturile) obținute prin înlocuirea soluțiilor exacte  $U$  și  $V$  ale sistemului (4.3) cu cele aproximative  $\tilde{U}, \tilde{V}$  sunt

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1(y, \tilde{U}(y)) &= \mathcal{L}_1(\tilde{U}(y)) + \mathcal{N}_1(\tilde{U}(y)) - f_1(y), \\ \mathcal{R}_2(y, \tilde{V}(y)) &= \mathcal{L}_2(\tilde{V}(y)) + \mathcal{N}_2(\tilde{V}(y)) - f_2(y), \quad y \in I \subset \mathbb{R}\end{aligned}\tag{4.4}$$

Se parcurg pașii din metoda perturbării omotopice, introdusă de He în [55],[52],[56], primul pas pentru aplicarea MPOMP este atașarea sistemului 4.4 familiei de ecuații

$$\begin{aligned}(1-p)[\mathcal{L}_1(\Phi_1(y, p)) - f_1(y)] + p [\mathcal{L}_1(\Phi_1(y, p)) + \mathcal{N}_1(\Phi_1(y, p)) - f_1(y)] &= 0 \\ (1-p)[\mathcal{L}_2(\Phi_2(y, p)) - f_2(y)] + p [\mathcal{L}_2(\Phi_2(y, p)) + \mathcal{N}_2(\Phi_2(y, p)) - f_2(y)] &= 0\end{aligned}\tag{4.5}$$

în care avem parametrul  $p \in [0, 1]$  iar  $\Phi_i$  cu  $i = \overline{1, 2}$  funcții necunoscute.

Când  $p$  crește de la 0 la 1, soluțiile  $\Phi_i$  ale sistemului (4.5) variază de la  $\Phi_1(y, 0) = U_0(y)$  și  $\Phi_2(y, 0) = V_0(y)$  până la  $\Phi_1(y, 1) = U(y)$  și  $\Phi_2(y, 1) = V(y)$ .

Funcțiile  $U_0$  și  $V_0$  sunt soluțiile sistemului:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1(U_0(y)) - f_1(y) &= 0 \\ \mathcal{L}_2(V_0(y)) - f_2(y) &= 0 \\ \mathcal{B}_i(U(y)) = 0, \mathcal{B}_j(V(y)) = 0, \quad i = \overline{1, n1} \quad j = \overline{1, n2}, \quad y \in \mathbb{R}.\end{aligned}\tag{4.6}$$

Se consideră următoarele dezvoltări pentru  $\Phi_i$ :

$$\begin{aligned}\Phi_1(y, p) &= U_0(y) + \sum_{m \geq 1} U_m(y) p^m \\ \Phi_2(y, p) &= V_0(y) + \sum_{m \geq 1} V_m(y) p^m\end{aligned}\tag{4.7}$$

Se înlocuiesc relațiile (4.7) în (4.5), se grupează termenii după puterile lui  $p$  și se egalează coeficienții aceluiași puteri ale lui  $p$ . În final se obțin:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1(U_m(y)) &= -\mathcal{N}_1^{m-1}(U_0(y), U_1(y), \dots, U_{m-1}(y)) \\ \mathcal{L}_2(V_m(y)) &= -\mathcal{N}_1^{m-1}(V_0(y), V_1(y), \dots, V_{m-1}(y)) \\ \mathcal{B}_i(U_m(y)) &= 0, \quad \mathcal{B}_j(V_m(y)) = 0, \quad i = \overline{1, n-1} \quad j = \overline{1, n-2}, \quad y \in \mathbb{R}\end{aligned}\tag{4.8}$$

unde  $\mathcal{N}_i^j$ ,  $j \geq 0$  sunt coeficienții lui  $p^j$  din operatorul neliniar  $\mathcal{N}_i$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_1(U(y)) &= \mathcal{N}_1^0(U_0(y)) + p\mathcal{N}_1^1(U_0(y), U_1(y)) + p^2\mathcal{N}_1^2(U_0(y), U_1(y), U_2(y)) + \dots \\ \mathcal{N}_2(V(y)) &= \mathcal{N}_1^0(V_0(y)) + p\mathcal{N}_1^1(V_0(y), V_1(y)) + p^2\mathcal{N}_1^2(V_0(y), V_1(y), V_2(y)) + \dots\end{aligned}\tag{4.9}$$

Se introduc notațiile

$$\begin{aligned}f_{1m} &= U_0 + U_1 + \dots + U_m, \\ f_{2m} &= V_0 + V_1 + \dots + V_m\end{aligned}\tag{4.10}$$

unde  $U_m, m \geq 1$ , și  $V_m, m \geq 1$ , sunt obținute din ecuațiile liniare (4.8).

Pentru  $m = 0, 1, 2, \dots$  se construiește mulțimea  $S_{im}$  care conține funcțiile:

$$\varphi_{im0}, \varphi_{im1}, \varphi_{im2}, \dots, \varphi_{imn_m},\tag{4.11}$$

alese ca funcții liniar independente în spațiul vectorial al funcțiilor continue pe intervalul real  $I$ .  $S_{im-1} \subseteq S_{im}$  și  $f_{im}$  este o combinație liniară reală a acestor funcții, unde  $i = \overline{1, 2}$ .

Folosind funcții de tipul (4.11), se definesc câteva tipuri de soluții aproximative ale sistemului (4.3).

**Definiție 4.1.1.** Un șir de funcții  $\{s_{im}\}_{m \in \mathbb{N}}$  de forma:

$$s_{im} = \sum_{k=0}^{n_m} \alpha_{im}^k \varphi_{imk}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \alpha_m^k \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, 2}\tag{4.12}$$

se numește **PO - șir** pentru sistemul (4.3).

Funcțiile din acest PO - șir se numesc **PO - funcții** pentru sistemul (4.3).

PO - șirul  $\{s_{im}\}_{m \in \mathbb{N}}$  care verifică proprietatea:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{R}_i(y, s_{1m}(y), s_{2m}(y)) = 0, \quad i = \overline{1, 2}$$

se numește **șir convergent la soluția sistemului** (4.3).

**Definiție 4.1.2.** PO - funcțiile  $\tilde{U}$  și  $\tilde{V}$  care pentru  $\varepsilon > 0$  satisfac condițiile:

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}_1(y, \tilde{U}, \tilde{V})| < \varepsilon, \quad \mathcal{B}_i(\tilde{U}) = 0 \\ |\mathcal{R}_2(y, \tilde{U}, \tilde{V})| < \varepsilon, \quad \mathcal{B}_j(\tilde{V}) = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

se numesc **soluții  $\varepsilon$  - PO aproximative** ale sistemului (4.3).

**Definiție 4.1.3.** PO - funcțiile  $\tilde{U}$  și  $\tilde{V}$  care pentru  $\varepsilon > 0$  satisfac condițiile:

$$\int_I \mathcal{R}_1^2(y, \tilde{U}, \tilde{V}) dy \leq \varepsilon, \quad \mathcal{B}_i(\tilde{y}) = 0 \quad (4.14)$$

$$\int_I \mathcal{R}_2^2(y, \tilde{U}, \tilde{V}) dy \leq \varepsilon, \quad \mathcal{B}_j(\tilde{y}) = 0 \quad (4.15)$$

se numesc **soluții slab  $\varepsilon - PO$  aproximative** pentru sistemul (4.3).

*Remarcă 4.1.1.* Se observă că orice soluție  $\varepsilon - PO$  aproximativă a sistemului (4.3) este, de asemenea, o soluție slab  $\varepsilon - PO$  aproximativă. Rezultă că șirul de soluții slab PO aproximative ale sistemului (4.3) conține, de asemenea, soluțiile PO aproximative ale sistemului.

Următoarea teoremă stabilește existența unor soluții slab PO aproximative ale sistemului (4.3) și oferă modalitatea prin care se construiesc aceste soluții PO aproximative.

**Teoremă 4.1.1.** *Sistemul (4.3) admite un șir de soluții slab PO aproximative.*

*Remarcă 4.1.2.* Demonstrația acestei teoreme arată modul în care se poate determina o soluție  $\tilde{U}, \tilde{V}$ ,  $\varepsilon$  - slab PO aproximativă a sistemului (4.3).

De asemenea, ținând cont de Remarca 4.1.1, dacă  $|\mathcal{R}_1(y, \tilde{U})| < \varepsilon$  și  $|\mathcal{R}_2(y, \tilde{V})| < \varepsilon$  atunci  $\tilde{U}$  și  $\tilde{V}$  sunt de asemenea soluții  $\varepsilon$  - slab PO aproximative ale sistemului inițial.

## 4.2 Exemplu - flux sanguin

Aplicația prezentată în această secțiune este cea inclusă în lucrarea lui Rashidi și colaboratorii în [86], unde autorii au folosit metoda de analiză a omotopiei și metoda transformării diferențiale pentru a găsi soluții analitice aproximative pentru următoarea problemă

$$\begin{aligned} UV' - VU' &= \frac{1}{Re} (U'' - Ha^2U) \\ V^{IV} &= Ha^2V'' + Re(V'V'' - VV''') \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$U(0) = 1, \quad V(0) = 0, \quad V'(0) = 0, \quad U(1) = 0, \quad V(1) = 1, \quad V'(1) = 0$$

Aceste ecuații modelează un flux magnetohidrodinamic laminar al unui fluid vâscos non-newtonian într-un canal semi-poros sub influența unui câmp magnetic static axial uniform.  $U$  și  $V$  sunt componentele vitezei axiale medii și, respectiv, normală,  $Ha$  este numărul lui Hartmann și  $Re$  este numărul lui Reynolds.

Rezultatele obținute aplicând MPOMP pentru determinarea soluțiilor analitice aproximative, au fost publicate în articolul **M.S.Paşca**, O.Bundău, A.Juratoni, B.Căruntu, *The Least Squares Homotopy Perturbation Method for Systems of Differential Equations with Application to a Blood Flow Model*, Mathematics (10/2) 2022, pag. 546-560 [87].

Pentru a găsi soluții analitice pentru acest tip de probleme, de-a lungul anilor au fost folosite diverse metode de aproximare, cu rate variate de succes printre care se regasesc și: metoda perturbației omotopiei [52], metoda iterației variaționale [56], metoda de descompunere Adomian [3] și metoda de omotopie asimptotică [74]. În timp ce aceste metode (și multe altele) au fost folosite cu succes, din cauza naturii ecuațiilor, calculele implicate sunt de obicei foarte dificile.

Ca utilitate practică a sistemului (4.16), acesta poate fi utilizat pentru a studia influența unui câmp magnetic asupra fluxului sanguin printr-un vas de sânge. Au fost stabilite numeroase modele pentru studiul fluxului sanguin hidrodinamic prin vase, de exemplu în [112] unde, autorii analizează fluxul de sânge în tuburi cu diametre reduse. De asemenea, în [118], autorii prezintă un studiu asupra fluxului sanguin prin tuburi arcuite mici. Fluxul sanguin a fost analizat prin efectul câmpului magnetic ca un fluid bun conductor de electricitate. Cunoscându-se că sângele este un ferofluid, se poate concluziona că există posibilitatea de a controla tensiunea arterială și comportamentul fluxului acestuia prin utilizarea unui câmp magnetic adecvat.

În [11], autorii au venit cu o reprezentare matematică a fluxului sanguin într-un vas de sânge de dimensiuni reduse în prezența unui câmp magnetic. Mai mult, în [120], autorii au investigat interacțiunea dintre celulele roșii din sânge și un câmp magnetic extern. Rezultatele arată capacitatea unui câmp magnetic de a modela fluxul sanguin. Alte cercetări privind proprietățile magnetice ale sângelui se bazează pe lucrările: [86, 8, 119, 77, 114, 16, 100, 64, 99, 6].

Multe modele matematice prezintă părți ale sistemului circulator uman (de exemplu [101, 111, 109, 124]), de cele mai multe ori, fluxul de sânge este modelat prin utilizarea ecuațiilor diferențiale, majoritatea neliniare. Cu toate acestea, este de obicei aproape imposibil să fie determinate soluții exacte pentru aceste tipuri de ecuații fiind utilizate diverse metode de aproximare pentru calcularea soluțiilor cât mai aproape de soluțiile exacte. Soluțiile aproximative calculate oferă informații importante despre fenomenle ce au loc în interiorul sistemului.

În secțiunea următoare, am aplicat metoda perturbațiilor omotopice în sensul celor mai mici pătrate pentru a calcula soluții aproximative pentru sistemul (4.16) pentru două cazuri cu importanța practică semnificativă ale numărului Hartmann  $Ha$  și ale numărului Reynolds  $Re$ . De asemenea, am cuprins și comparații ale soluțiilor obținute aplicând MPOMP cu soluțiile anetrioare obținute în literatură.

## **Cazul numărului lui Reynolds $Re = 1$ și numărului lui Hartmann $Ha = 0$**

Cazul  $Re = 1$  și  $Ha = 0$  corespunde unui flux sanguin neconductor.

În [86], Basiri Parsa și colaboratorii au calculat soluții aproximative ale sistemului (4.16) utilizând metoda analizei omotopiei (OAM), metoda transformării diferențiale (DTM), iar în [33] Căruntu și colaboratorii au calculat soluția aproximativă a sistemului utilizând metoda de aproximare polinomială în sensul celor mai mici pătrate (MAPMP).

Pentru a aplica MPOMP sistemului (4.16), se determină soluția analitică aproximativă parcurgând etapele:

- operatorii liniari sunt:

$$\mathcal{L}_1(\Phi_1(y, p)) = -\frac{1}{Re}U''; \quad \mathcal{L}_2(\Phi_2(y, p)) = V^{IV} \quad (4.17)$$

- iar cei neliniari:

$$\mathcal{N}_1(\Phi_1(t, p)) = \frac{Ha^2}{Re}U + UV' - U'V; \quad \mathcal{N}_2(\Phi_2(t, p)) = -Ha^2V'' - Re(V'V'' - VV'''). \quad (4.18)$$

Se calculează aproximările :

- primul termen al aproximării (aferent puterii zero a parametrului  $p^0$ ) este

$$U_0(y) = 1 - y; \quad V_0(y) = 3y^2 - y^3 \quad (4.19)$$

- al doilea termen (pentru  $p^1$ ) este

$$U_1(y) = \frac{y^5}{5} - \frac{3y^4}{4} + y^3 - \frac{29y}{20} + 1; \quad V_1(y) = \frac{2y^7}{35} - \frac{y^6}{5} + \frac{3y^5}{10} - \frac{167y^3}{70} + \frac{113y^2}{35} \quad (4.20)$$

- al treilea termen este

$$U_2(y) = \frac{2y^9}{315} - \frac{19y^8}{560} + \frac{y^7}{20} - \frac{y^6}{20} + \frac{23y^5}{70} - \frac{1643y^4}{1680} + \frac{113y^3}{105} - \frac{1763y}{1260} + 1$$

$$V_2(y) = \frac{4y^{11}}{5775} - \frac{2y^{10}}{525} + \frac{y^9}{210} - \frac{3y^8}{560} + \frac{97y^7}{1225} - \frac{533y^6}{2100} + \frac{121y^5}{350} - \frac{774469y^3}{323400} + \frac{2087479y^2}{646800} \quad (4.21)$$

Pentru aproximarea termenului  $U_0+U_1$ , mulțimea  $S_{1m}$  constă din funcțiile  $\{y, y^3, y^4, y^5\}$  și pentru  $V_0 + V_1$  mulțimea  $S_{2m} = \{y^2, y^3, y^5, y^6, y^7\}$ .

Se construiește o soluție aproximativă de forma:

$$\tilde{U}(y) = c_0 + c_1y + c_2y^3 + c_3y^4 + c_4y^5 \text{ și } \tilde{V}(y) = d_0y^2 + d_1y^3 + d_2y^5 + d_3y^6 + d_4y^7.$$

Cu ajutorul condițiilor inițiale date:

$$\tilde{U}(0) = 1, \tilde{U}(1) = 0, \tilde{V}(0) = 0, \tilde{V}(1) = 1, \tilde{V}'(0) = 0, \tilde{V}'(1) = 0$$

se obțin:  $c_0 = 1, \quad c_1 = -1 - c_2 - c_3 - c_4$

respectiv  $d_0 = -2d_2 + 3d_3 + 4d_4 + 3, \quad d_1 = -3d_2 - 4d_3 - 5d_4 - 2.$

Înlocuind expresiile lui  $c_0, c_1, d_0$ , și  $d_1$  în expresia resturilor rezultă

$$\mathcal{R}_1(y, \tilde{U}) = \mathcal{R}(y, c_2, c_3, c_4); \quad \mathcal{R}_2(y, \tilde{V}) = \mathcal{R}(y, d_2, d_3, d_4) \quad (4.22)$$

Funcționalele corespunzătoare sunt

$$\mathcal{J}_1(c_2, c_3, c_4) = \int_0^1 \mathcal{R}_1^2(y, c_2, c_3, c_4) dy; \quad \mathcal{J}_2(d_2, d_3, d_4) = \int_0^1 \mathcal{R}_2^2(y, d_2, d_3, d_4) dy \quad (4.23)$$

Prin minimizarea acestor funcționale se determină coeficienții:  $c_j$  și  $d_j$ ,  $j = \overline{2, 4}$ , cu ajutorul cărora se determină următoarele soluții aproximative pentru sistemul (4.16):

- aproximarea termenului de grad doi:

$$\tilde{U}(y) = 0.2513943y^5 - 0.8905203y^4 + 1.04400719y^3 - 1.404881162y + 1;$$

$$\tilde{V}(y) = 0.05831712y^7 - 0.218893y^6 + 0.3252221y^5 - 2.39167630y^3 + 3.22703097y^2.$$

- aproximarea termenului de grad trei:

$$\tilde{U}(y) = -0.01278317y^9 + 0.07931201y^8 - 0.21264y^7 + 0.260967636y^6 + 0.132368501y^5 - 0.90665763y^4 + 1.0653323749y^3 - 1.4058936967y + 1;$$

$$\tilde{V}(y) = 0.000772521972y^{11} - 0.0033512835y^{10} + 0.002836561y^9 - 0.0031087019y^8 + 0.079915383y^7 - 0.25695066296y^6 + 0.3470628y^5 - 2.3943088377y^3 + 3.22713221y^2.$$

Comparația este prezentată în Tabelele 4.1 care includ rezultatele obținute în [86], prin intermediul OAM și DTM, rezultatele obținute în [33] prin MAPMP și rezultatele calculate prin OPM clasic și prin MPOMP.

$y$	$\varepsilon_{OAM}$ [86]	$\varepsilon_{DTM}$ [86]	$\varepsilon_{PLSM}$ [33]	$\varepsilon_{OPM2}$ t.	$\varepsilon_{OPM}$ 3t.	$\varepsilon_{MPOMP}$ 2t.	$\varepsilon_{MPOMP}$ 3t.
0.1	$9.04 \times 10^{-3}$	$1.08 \times 10^{-2}$	$8.06 \times 10^{-4}$	$4.45 \times 10^{-3}$	$6.77 \times 10^{-4}$	$8.61 \times 10^{-5}$	$3.68 \times 10^{-6}$
0.2	$1.77 \times 10^{-2}$	$1.77 \times 10^{-2}$	$1.90 \times 10^{-3}$	$9.08 \times 10^{-3}$	$1.35 \times 10^{-3}$	$8.00 \times 10^{-5}$	$1.56 \times 10^{-6}$
0.3	$2.71 \times 10^{-2}$	$1.98 \times 10^{-2}$	$2.14 \times 10^{-3}$	$1.37 \times 10^{-2}$	$2.01 \times 10^{-3}$	$4.18 \times 10^{-6}$	$3.41 \times 10^{-6}$
0.4	$3.45 \times 10^{-2}$	$1.79 \times 10^{-2}$	$1.34 \times 10^{-3}$	$1.78 \times 10^{-2}$	$2.64 \times 10^{-3}$	$9.71 \times 10^{-5}$	$9.99 \times 10^{-8}$
0.5	$3.73 \times 10^{-2}$	$1.39 \times 10^{-2}$	$8.14 \times 10^{-5}$	$2.10 \times 10^{-2}$	$3.16 \times 10^{-3}$	$1.29 \times 10^{-4}$	$2.42 \times 10^{-6}$
0.6	$3.46 \times 10^{-2}$	$9.33 \times 10^{-3}$	$1.43 \times 10^{-3}$	$2.24 \times 10^{-2}$	$3.50 \times 10^{-3}$	$7.69 \times 10^{-5}$	$1.22 \times 10^{-6}$
0.7	$2.77 \times 10^{-2}$	$5.39 \times 10^{-3}$	$2.09 \times 10^{-3}$	$2.15 \times 10^{-2}$	$3.54 \times 10^{-3}$	$2.59 \times 10^{-5}$	$9.10 \times 10^{-7}$
0.8	$1.87 \times 10^{-2}$	$2.63 \times 10^{-3}$	$1.74 \times 10^{-3}$	$1.78 \times 10^{-2}$	$3.12 \times 10^{-3}$	$9.63 \times 10^{-5}$	$7.61 \times 10^{-7}$
0.9	$9.27 \times 10^{-3}$	$9.33 \times 10^{-4}$	$6.99 \times 10^{-4}$	$1.07 \times 10^{-2}$	$2.02 \times 10^{-3}$	$6.71 \times 10^{-5}$	$4.05 \times 10^{-7}$

Tabela 4.1: Compararea erorilor absolute ale soluțiilor aproximative  $U$  în cazul  $Re = 1$  și  $Ha = 0$ .

### 4.3 Comentarii bibliografice

În acest capitol am descris Metoda perturbațiilor omotopice în sensul celor mai mici pătrate cu aplicație asupra rezolvării unui sistem de ecuații diferențiale care modelează fluxul sanguin prin vasele de sânge. Metoda a fost prezentată în 2017 de C Bota și B Căruntu în lucrarea [23].

Rezultatele originale privind Teorema 4.1.1 și aplicarea acestei metode unui sistem care modelează fluxul sanguin, rezultate obținute în timpul stagiului doctoral au fost publicate în articolul: M.S. Pașca, O. Bundau, A Juratoni, B. Căruntu, *The Least Squares Homotopy Perturbation Method for Systems of Differential Equations with Application to a Blood Flow Model*, Mathematics (10/2) 2022, pag. 546-560.

# Capitolul 5

## Metoda de aproximare polinomială în sensul celor mai mici pătrate pe subintervale (MAPMPS)

În acest capitol este descrisă o nouă metodă de determinare a soluțiilor analitice aproximative pentru diverse tipuri de ecuații diferențiale, metodă elaborată de mine în urma calculelor efectuate de-a lungul stagiului doctoral.

În ultimele luni de activitate am prezentat rezultatele obținute în cadrul mai multor conferințe interne și internaționale.

### 5.1 MAPMPS pentru ecuații de tip Bagley-Torvik

Rezultatele obținute aplicând MAPMPS unei ecuații de tip:

$$y''(x) + k \cdot D^\alpha y(x) + \lambda \cdot y(x) = 0, \quad x \in [a, b] \quad (5.1)$$

cu  $1 < \alpha < 2$ , și cu condițiile inițiale:

$$y(a) = 0, y'(a) = 1, \quad (5.2)$$

le-am prezentat în cadrul conferinței SACI 2022 care s-a desfășurat în Timișoara în perioada 25-28 mai 2022 și vor apărea în Proceedings-ul conferinței cotate IEE și WBS.

Problema de tipul (5.1) a fost folosită pentru a modela caracteristicile de rezistență la deformare ale betonului polimeric. Acest beton polimeric este reprezentat ca un set de granule de minerale diluate într-un mediu elastic-plastic. Mișcarea granulelor este descrisă de ecuația (5.1), unde  $k$  este vâscozitatea,  $\lambda$  este modulul de rigiditate, iar  $\alpha$  este parametrul elastic-plastic al mediului.

Betonul polimeric poate fi utilizat pentru construcții noi sau repararea betonului vechi. Proprietățile sale adezive permit repararea atât a betoanelor polimerice, cât și a betoanelor convenționale pe bază de ciment. Rezistența la coroziune și permeabilitatea scăzută a betonului polimeric îi permite să fie utilizat la construcția piscinelor, a structurilor de canalizare, a canalelor de drenaj și a altor structuri care conțin lichide sau substanțe chimice corozive.

Având o utilitate practică largă s-au căutat soluții ale sistemului descris în (5.1) unde  $D^\alpha y$  reprezintă derivata fracționară în sens Caputo de ordinul  $\alpha$ .



În secțiunea următoare se prezintă Metoda de aproximare polinomială în sensul celor mai mici pătrate pe subintervale (MAPMPS) care permite determinarea soluțiilor polinomiale aproximative analitice pentru ecuații diferențiale ordinare fracționare. Voi compara soluțiile aproximative astfel obținute cu cele prezentate de Alerov și colaboratorii săi în [5].

### 5.1.1 Descrierea metodei MAPMPS

Se consideră o diviziune a intervalului  $I = [a, b]$  formată din  $M + 1$  puncte:

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{M-1} < a_M = b.$$

Pe fiecare subinterval al domeniului de definiție, astfel obținut:  $I_i = [a_i, a_{i+1}]$  cu  $i = \overline{0, M-1}$  se notează cu  $\tilde{y}_i$  o soluție aproximativă a ecuației (5.1). Eroarea obținută prin înlocuirea soluției exacte  $y$  cu soluția aproximativă  $\tilde{y}_i$  va genera resturile:

$$\mathcal{R}_i(\tilde{y}_i(x)) = \tilde{y}_i''(x) + k \cdot D^\alpha \tilde{y}_i(x) + \lambda \cdot \tilde{y}_i(x). \quad (5.3)$$

**Definiție 5.1.1.** Numim soluție  $\varepsilon$ -aproximare polinomială în sensul celor mai mici pătrate pe subintervale, pentru problema (5.1-5.2) o soluție  $\tilde{y} = \tilde{y}_i, x \in I_i$  care satisface relațiile:

$$|\mathcal{R}_i(\tilde{y}_i(x))| < \varepsilon, \quad i = \overline{0, M-1}, \quad \varepsilon > 0 \quad (5.4)$$

împreună cu

$$\tilde{y}_i(a_i) = 0. \quad (5.5)$$

**Definiție 5.1.2.** Numim soluție slab  $\varepsilon$ -aproximare polinomială în sensul celor mai mici pătrate pe subintervale pentru problema (5.1-5.2) o soluție polinomială  $\tilde{y}_i$  care satisface relațiile:

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} |\mathcal{R}_i(\tilde{y}_i)| dx \leq \varepsilon, \quad i = \overline{0, M-1} \quad (5.6)$$

împreună cu condiția (5.5).

**Definiție 5.1.3.** Fie polinoamele  $P_{ij}(x) = c_{i0} + c_{i1}x + c_{i2}x^2 + \dots + c_{im}x^m$ ,  $c_{ij} \in \mathbb{R}$  cu  $i = \overline{0, M-1}$ ,  $j = \overline{0, m}$  care verifică:

$$P_{im}(a_i) = 0.$$

Spunem că șirul de polinoame  $\{P_{ij}(x)\}$  este **convergent** la soluția problemei (5.1-5.2) dacă are loc

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{R}_i(P_{im}(x)) = 0, \quad \forall i = \overline{0, M-1}.$$

Din ipoteza problemei inițiale (5.1) rezultă că există un șir de polinoame  $\{P_{im}\}$  care converge la soluția problemei, conform teoremei lui Weierstrass de aproximare polinomială.

Vom calcula o soluție polinomială aproximativă pe subintervale slab  $\varepsilon$  aproximativă, în sensul Definiției 5.1.1, de tipul:

$$\tilde{y}_i(x) = \sum_{k=0}^m d_{ik}x^k, \quad m > 0 \quad (5.7)$$

unde  $d_{i0}, d_{i1}, \dots, d_{im}$  sunt constante care sunt calculate parcurgând etapele:

- prin înlocuirea soluțiilor aproximative (5.7) în ecuația (5.1) se obțin:

$$\mathcal{R}_i(\tilde{y}_i) = \tilde{y}_i''(x) + k \cdot D^\alpha \tilde{y}_i(x) + \lambda \cdot \tilde{y}_i(x). \quad (5.8)$$

Pentru determinarea soluției aproximative avem de determinat coeficienții  $d_{i0}, \dots, d_{im}$  astfel că  $\mathcal{R}_i(\tilde{y}_i) = 0$ ,  $\tilde{y}_i(a_i) = 0$ . Se înlocuiesc  $d_{i0}, d_{i1}, \dots, d_{im}$  în (5.7)) și se obține o soluție aproximativă pe subintervale pentru ecuația (5.1).

- se atașează problemei (5.1 -5.2) pe fiecare subinterval  $I_i$  câte o funcțională:

$$\mathcal{J}_i(d_{i1}, d_{i2}, d_{i3}, \dots, d_{im}) = \int_{a_i}^{a_{i+1}} \mathcal{R}_i^2(\tilde{y}_i) dx \quad (5.9)$$

în care  $d_{i0}$  este funcție de  $d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{im}$  din condiția inițială.

- se calculează coeficienții  $d_{i1}^0, \dots, d_{im}^0$  ca valori care dau minimumul funcționalei  $\mathcal{J}_i$ .
- cu constantele  $d_{i1}^0, \dots, d_{im}^0$  astfel determinate se construiește polinomul

$$T_{im}(x) = \sum_{k=0}^m d_{ik}^0 x^k. \quad (5.10)$$

Are loc următoarea teoremă de convergență:

**Teoremă 5.1.1.** *Șirul polinoamelor  $\{T_{im}\}$  din (5.10) satisface:*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \mathcal{R}^2(T_{im}(x)) dx = 0. \quad (5.11)$$

Pentru a calcula o soluție  $\varepsilon$  aproximativă polinomială, pe subintervale, pentru problema (5.1) utilizând MAPMPS, vom determina mai întâi o soluție polinomială slab  $\varepsilon$  aproximativă,  $\tilde{y}_i$ .

Dacă are loc  $|\mathcal{R}(\tilde{y}_i)| < \varepsilon$  atunci  $\tilde{y}_i$  este, de asemenea și o soluție  $\varepsilon$  aproximativă de tip polinomial pentru problema dată.

## 5.1.2 Exemplu numeric

În ecuația (5.1) se consideră valorile  $k = 1.8$  și  $\lambda = 93$ , valori obținute experimental de Alerov în [36].

Se aplică metoda MAPMPS pentru determinarea unei soluții analitice aproximative. Rezultatele obținute se compară cu ceea ce s-a obținut punctual, experimental, prin măsurători directe de către Alerov și colaboratorii săi.

Se consideră astfel ecuația Bagley-Torvik diferențială de ordin fracționar [5]:

$$y''(x) + 1.8 \cdot D^\alpha y(x) + 93 \cdot y(x) = 0 \quad (5.12)$$

cu  $x \in [0, 1.5]$ , care verifică  $y(0) = 0$  și  $y'(0) = 1$ .

## Cazul $\alpha = 1$

Pentru cazul întreg ( $\alpha = 1$ ) se calculează soluția exactă:

$$y(x) = \frac{10e^{-\frac{9t}{10}} \sin\left(\frac{\sqrt{9219}x}{10}\right)}{\sqrt{9219}}$$

Aplicând metoda MAPMPS descrisă în secțiunea anterioară, se poate împărți intervalul  $I = [0, 1.5]$  într-un număr diferit de subintervale și se pot utiliza pentru aproximare polinoame de diverse grade.

Cunoscând rezultatele experimentale amintite se folosesc șase subintervale și se construiesc soluții aproximative de tip polinom de grad patru. Astfel pentru determinarea soluției aproximative se parcurg următorii pași:

- se împarte intervalul  $I = [0, 1.5]$  în șase subintervale de lungime egală

$$0 = a_0 < a_1 < \dots < a_5 = 1.5$$

construind pe fiecare subinterval câte o soluție aproximativă de forma:

$$\tilde{y}_i(x) = d_{i0} + d_{i1} \cdot x + d_{i2} \cdot x^2 + d_{i3} \cdot x^3 + d_{i4} \cdot x^4$$

cu  $i = \overline{0, 5}$ . Din condiția inițială se va putea determina  $d_{i0}$ .

- soluția aproximativă pentru fiecare subinterval devine  $\tilde{y}_i$ , fiecare fiind un polinom de grad patru cu coeficienți necunoscuți pentru  $x, x^2, x^3$  și  $x^4$ .

- restul (diferența dintre soluția exactă și cea aproximativă) este:  $\mathcal{R}_i(\tilde{y}_i)$  pe fiecare subinterval  $I_i$ .

- se compun funcționalele:

$$\mathcal{J}_i(d_{i1}, d_{i2}, d_{i3}, d_{i4}) = \int_{a_i}^{a_{i+1}} \mathcal{R}_i^2(\tilde{y}_i(x)) dx$$

- prin minimizarea acestor funcționale în raport cu  $d_{i1}, d_{i2}, d_{i3}, d_{i4}, i = \overline{0, 5}$  se determină coeficienții cu care se vor construi soluțiile polinomiale MAPMPS care împreună conduc la soluția:

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} 30.180x^4 - 16.521x^3 - 0.856x^2 + x, & x \in [0, 0.25] \\ -17.486x^4 + 33.446x^3 - 20.820x^2 + 4.591x - 0.244, & x \in [0.25, 0.5] \\ 1.27433x^4 - 10.7486x^3 + 17.4514x^2 - 9.913x + 1.791, & x \in [0.5, 0.75] \\ 9.6662x^4 - 29.5549x^3 + 31.532x^2 - 13.4617x + 1.8107, & x \in [0.75, 1] \\ -12.1678x^4 + 54.5591x^3 - 89.987x^2 + 64.573x - 16.983, & x \in [1, 1.25] \\ 8.122x^4 - 47.1712x^3 + 101.441x^2 - 95.651x + 33.346, & x \in [1.25, 1.5] \end{cases}$$

Tablul 5.1 prezintă comparația dintre rezultatele experimentale corespunzătoare soluției numerice propuse de Alerov în [5], soluția exactă și soluția obținută folosind MAPMPS.

x	Soluția determinată experimental Alerov [5]	Soluția Exactă	Soluția MAPMPS	$\varepsilon_{MAPMPS}$
0.25	$5 \times 10^{-2}$	$5.615 \times 10^{-2}$	$5.619 \times 10^{-2}$	$4.464 \times 10^{-4}$
0.50	$-4 \times 10^{-2}$	$-6.614 \times 10^{-2}$	$-6.600 \times 10^{-2}$	$1.400 \times 10^{-4}$
0.75	$-1 \times 10^{-2}$	$4.212 \times 10^{-2}$	$4.166 \times 10^{-2}$	$4.412 \times 10^{-4}$
1.00	$2 \times 10^{-2}$	$-6.795 \times 10^{-3}$	$-6.801 \times 10^{-3}$	$6.456 \times 10^{-4}$
1.25	$-1 \times 10^{-2}$	$-1.808 \times 10^{-2}$	$-1.860 \times 10^{-2}$	$5.206 \times 10^{-4}$
1.50	$-1 \times 10^{-2}$	$2.605 \times 10^{-2}$	$2.619 \times 10^{-2}$	$1.429 \times 10^{-4}$

Tabela 5.1: Comparație între soluțiile problemei 5.12

Astfel este ilustrată o bună acuratețe a metodei MAPMPS, care ne permite să folosim aceeași procedură și în cazul  $\alpha \in (1, 2)$ . Pentru cazul fracționar nu se pot face comparații cu rezultatele obținute de alți autori, deoarece până acum nu au fost publicate soluții analitice sau numerice pentru acest caz.

### Cazul $\alpha \in (1, 2)$

Pentru  $\alpha = 1.47$  parcurgând algoritmul descris mai sus s-a determinat soluția analitică aproximativă MAPMPS (folosind o aproximare polinomială de gradul 4 și împărțind intervalul  $I$  în șase subintervale echidistante)

Pentru primul subinterval, restul calculat este

$$\mathcal{R}_1(\tilde{y}(x)) = \frac{200x^{53/100}(12903d_2 + 100x(253d_3 + 400d_4x))}{683859\Gamma\left(\frac{53}{100}\right)}$$

obținut prin alegerea unei soluții polinomiale aproximative de forma

$$\tilde{y}(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 + d_4x^4.$$

Funcționala corespunzătoare atașată este:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1(d_2, d_3, d_4) = & \frac{120x^{53/100}(12903d_2 + 100x(253d_3 + 400d_4x))}{227953\Gamma\left(\frac{53}{100}\right)} + \\ & + 93(d_2x^2 + d_3x^3 + d_4x^4 + t) + 2d_2 + 6d_3x + 12d_4x^2 \end{aligned}$$

Prin minimizarea acestei funcționale se obține soluția analitică aproximativă pe primul subinterval  $I_1 = [0, 0.25]$

$$\tilde{y}_1(x) = 19.752x^4 - 13.349x^3 - 0.04089x^2 + x.$$

Se reia procedeul pe fiecare subinterval și se obține soluția de mai sus.

Se repetă algoritmul pentru  $\alpha = 1.60, 1.7$  și  $1.9$ .

## 5.2 MAPMPS pentru ecuații de tip Riccati

Urmând algoritmul descris în 5.1.1 se determină soluții analitice aproximative și pentru ecuații de tip Riccati.

*Exemplul 5.2.1.*

Astfel se consideră problema studiată și în [6], [22], [32], [108] formată din ecuația

$$D^\alpha y(x) = -y^2(x) + 1, x \in [0, 1] \quad (5.13)$$

cu condiția inițială

$$y(0) = 0$$

unde  $y$  este o funcție absolut continuă pe intervalul  $[0, 1]$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , cu  $D^\alpha y$  derivata fracționară de ordin  $\alpha$  în sens Caputo (conform Definiției ??) a funcției  $y$ , astfel încât să fie satisfăcută condiția de existență și unicitate a soluției.

Doar pentru cazul întreg  $\alpha = 1$  se cunoaște soluția exactă:

$$y(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

Se determină cu ajutorul metodei MAPMPS o soluție analitică aproximativă pentru această problemă. În acest sens se parcurg etapele descrise în secțiunea anterioară, astfel:

- se divide intervalul  $I = [0, 1]$  în patru subintervale echidistante  $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_3 = 1$ . Pentru fiecare subinterval  $I_i = [a_i, a_{i+1}]$  cu  $i = \overline{0, 3}$  se compune o soluție aproximativă de tip polinomial de forma

$$\tilde{y}_i(x) = d_{i0} + d_{i1} \cdot x + d_{i2} \cdot x^2 + d_{i3} \cdot x^3 + d_{i4} \cdot x^4 + d_{i5} \cdot x^5$$

. Din condiția inițială se determină  $d_{i0}$ .

- Pe fiecare subinterval soluția aproximativă devine  $\tilde{y}_i$  - polinom de grad cinci cu coeficienți necunoscuți pentru puterile  $x, x^2, \dots, x^5$ .
- Prin înlocuirea soluției exacte  $y$  cu soluția aproximativă  $\tilde{y}$  pe fiecare subinterval  $I_i$  se va determina restul de forma  $\mathcal{R}_i(x, \tilde{y}_i)$ .
- Se atașează funcționala:

$$\mathcal{J}_i(d_{i1}, d_{i2}, d_{i3}, d_{i4}, d_{i5}) = \int_{a_i}^{a_{i+1}} \mathcal{R}_i^2(x, \tilde{y}_i) dx$$

Se minimizează  $\mathcal{J}_i$  în raport cu fiecare din variabile și se obțin astfel coeficienții care vor duce la afarea polinomului de aproximare pe fiecare subinterval considerat.

Soluția analitică aproximativă de tip polinom MAPMPS este:

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} \tilde{y}_1(x) = 0.115x^5 + 0.006x^4 - 0.334x^3 + 0.00005x^2 + 0.999x, x \in [0, 0.25] \\ \tilde{y}_2(x) = 0.019x^5 + 0.13x^4 - 0.41x^3 + 0.018x^2 + 0.997x + 0.00016, x \in [0.25, 0.5] \\ \tilde{y}_3(x) = -0.054x^5 + 0.3x^4 - 0.572x^3 + 0.103x^2 + 0.976x + 0.0023, x \in [0.5, 0.75] \\ \tilde{y}_4(x) = -0.058x^5 + 0.31x^4 - 0.58x^3 + 0.102x^2 + 0.978x + 0.0016, x \in [0.75, 1] \end{cases}$$

x	$\varepsilon_{VIM}$ [6]	$\varepsilon_{LSDQ}$ [32]	$\varepsilon_{JCM}$ [108]	$\varepsilon_{MAPMPS}$ gr.5	$\varepsilon_{MAPMPS}$ 6	$\varepsilon_{MAPMPS}$ 7
0	0	0	0	0	0	0
0.10	$5.00 \times 10^{-11}$	$1.59 \times 10^{-5}$	$4.57 \times 10^{-9}$	$3.11 \times 10^{-9}$	$4.46 \times 10^{-10}$	$4.13 \times 10^{-13}$
0.20	$4.39 \times 10^{-9}$	$2.43 \times 10^{-5}$	$9.74 \times 10^{-10}$	$6.94 \times 10^{-9}$	$3.52 \times 10^{-10}$	$6.21 \times 10^{-13}$
0.30	$1.56 \times 10^{-7}$	$1.41 \times 10^{-5}$	$3.71 \times 10^{-9}$	$1.06 \times 10^{-8}$	$1.05 \times 10^{-10}$	$2.05 \times 10^{-12}$
0.40	$1.97 \times 10^{-6}$	$2.32 \times 10^{-5}$	$1.29 \times 10^{-9}$	$5.56 \times 10^{-9}$	$1.32 \times 10^{-10}$	$1.95 \times 10^{-12}$
0.50	$1.38 \times 10^{-5}$	$3.95 \times 10^{-5}$	$1.93 \times 10^{-9}$	$1.72 \times 10^{-13}$	$2.22 \times 10^{-14}$	$5.55 \times 10^{-17}$
0.60	$6.61 \times 10^{-5}$	$1.82 \times 10^{-5}$	$2.74 \times 10^{-9}$	$2.30 \times 10^{-9}$	$3.11 \times 10^{-10}$	$5.83 \times 10^{-11}$
0.70	$2.43 \times 10^{-4}$	$1.58 \times 10^{-5}$	$4.32 \times 10^{-9}$	$3.43 \times 10^{-9}$	$2.56 \times 10^{-10}$	$4.38 \times 10^{-11}$
0.80	$7.35 \times 10^{-4}$	$2.18 \times 10^{-5}$	$2.43 \times 10^{-9}$	$1.88 \times 10^{-9}$	$2.05 \times 10^{-10}$	$3.78 \times 10^{-11}$
0.90	$1.91 \times 10^{-3}$	$1.05 \times 10^{-5}$	$3.59 \times 10^{-10}$	$1.19 \times 10^{-9}$	$5.49 \times 10^{-11}$	$3.41 \times 10^{-11}$
1	$4.42 \times 10^{-3}$	$2.03 \times 10^{-5}$	$7.01 \times 10^{-9}$	$1.07 \times 10^{-13}$	$7.77 \times 10^{-17}$	$1.28 \times 10^{-13}$

Tabela 5.2: Comparații între erorile absolute pentru Exemul 5.2.1, cazul  $\alpha = 1$

A fost reluat algoritmul descris mai sus și s-a determinat și soluția analitică aproximativă, de tip polinomial, pe subintervale, utilizându-se pentru polinoamele de aproximare gradul 6 și gradul 7. Tabelul 5.2. conține comparațiile între erorile determinate de alți cercetători pentru această aplicație și rezultatele aplicând MAPMPS.

În tabel se pot observa erori comparabile cu ceea ce se regăsește în literatură și pentru polinom de aproximare de grad 5, motiv pentru care se va păstra acest grad minim pentru cazul fracționar. Sigur că majorând gradul polinoamelor de aproximare, precum și crescând numărul de subintervale, se vor obține soluții cu eroare tot mai mică, însă timpul consumat pentru determinarea soluțiilor va crește. Astfel că urmărind și un consum cât mai mic de resurse, pentru cazul fracționar aproximările se vor determina doar cu polinom de grad cinci și folosind patru subintervale echidistante.

Soluțiile numerice obținute sunt:

- pentru  $\alpha = 0.9$

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} 237.87x^5 - 174.75x^4 + 48.25x^3 - 6.82x^2 + 1.64x, & x \in [0, 0.25] \\ 0.30x^5 - 0.57x^4 + 0.51x^3 - 0.77x^2 + 1.29x + 0.007, & x \in [0.25, 0.5] \\ -0.04x^5 + 0.18x^4 - 0.13x^3 - 0.49x^2 + 1.23x + 0.01, & x \in [0.5, 0.75] \\ -0.03x^5 + 0.12x^4 - 0.04x^3 - 0.56x^2 + 1.26x + 0.008, & x \in [0.75, 1] \end{cases}$$

- pentru  $\alpha = 0.8$

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} 701.83x^5 - 512.74x^4 + 141.14x^3 - 19.37x^2 + 2.63x, & x \in [0, 0.25] \\ 1.06x^5 - 2.45x^4 + 2.62x^3 - 2.13x^2 + 1.68x + 0.015, & x \in [0.25, 0.5] \\ 0.07x^5 - 0.36x^4 + 0.88x^3 - 1.42x^2 + 1.55x + 0.022, & x \in [0.5, 0.75] \\ 0.02x^5 - 0.20x^4 + 0.67x^3 - 1.29x^2 + 1.51x + 0.025, & x \in [0.75, 1] \end{cases}$$

## 5.3 Comentarii

Exemplele numerice prezentate în ambele subcapitole ale acestui ultim capitol al lucrării ilustrează o bună concordanță între rezultatele obținute utilizând această nouă metodă și rezultatele existente în literatură. De asemenea din descrierea metodei reiese gradul redus de dificultate prin care se determină soluțiile analitice aproximative pentru diverse tipuri de probleme cu aplicabilitate în viața reală. Se observă totodată o convergența rapidă a soluției aproximative spre soluția exactă, având în vedere că aproximările polinomiale se calculează pe intervale de lungime redusă (subintervale ale domeniului de definiție). Acesta este și motivul pentru care timpul computațional nu este unul ridicat, chiar dacă se calculează mai multe polinoame de aproximare (pe fiecare subinterval câte un polinom) pentru ca în final să fie obținută soluția pe întreg intervalul de definiție. Sunt mai multe polinoame, dar având grad mai mic sunt necesari mai puțini coeficienți, calculul de minimizare se face pentru funcționale care au un număr mai redus de necunoscute.

Rămâne în continuare deschisă problema determinării mai rapide a numărului optim de subintervale pentru fiecare tip de problemă în parte precum și gradul minim necesar pentru polinomul de aproximare pe fiecare subinterval. Toate acestea se vor studia și perfecționa în perioada următoare, ducând probabil la scrierea de alte comunicări științifice ce se vor prezenta la conferințe interne și internaționale, precum și, poate, la publicarea altor articole în jurnale de specialitate.

## Concluzii

Pe parcursul celor patru ani de stagiul doctoral am calculat soluții analitice aproximative pentru diverse tipuri de ecuații cu derivate fracționare, aplicând metode de aproximare polinomială în sensul celor mai mici pătrate.

Am folosit *metoda de aproximare polinomială în sensul celor mai mici pătrate*, introdusă într-o primă formă de Prof C. Bota și B. Căruntu în 2012, pentru determinarea soluțiilor analitice aproximative pentru ecuații Bagley-Torvik, Lane-Emden, probleme de control optimal și ecuații integro-diferențiale de tip Fredholm-Volterra. Rezultatele obținute în urma calculelor au fost publicate în mai multe articole în jurnale de specialitate. În prima parte a tezei am menționat articolele și citările existente până la 1.09.2022 din partea autorilor străini cu preocupări în determinarea soluțiilor numerice sau analitice pentru ecuații cu derivate fracționare.

În continuare am utilizat *metoda de aproximare polinomială în sensul celor mai mici pătrate aplicată unei diviziuni a intervalului de definiție* metodă introdusă de Prof C. Bota și B. Căruntu în 2017 și am aplicat-o unor ecuații de tip Bagley-Torvik, Riccati, unor ecuații neliniare cu derivate fracționare și unor sisteme de ecuații diferențiale. Ca și în cazul metodei MAPMP, rezultatele obținute au fost publicate în jurnale de specialitate. Apoi am aplicat *metoda perturbațiilor omotopice în sensul celor mai mici pătrate*, metodă dezvoltată tot de Prof C. Bota și B. Căruntu în 2017, pentru determinarea soluțiilor aproximative pentru un sistem de ecuații diferențiale care modelează fluxul sanguin. Și în acest caz rezultatele astfel obținute au fost publicate în cadrul unui articol dintr-o revistă de specialitate.

Pornind de la aceste metode, dezvoltate în ultimul deceniu în cadrul Universității Politehnica din Timișoara, pe care le-am aplicat pentru rezolvarea unor ecuații cu aplicabilitate practică în diverse ramuri ale științei, în ultimele luni am dezvoltat o metodă originală, *Metoda de aproximare polinomială în sensul celor mai mici pătrate pe subintervale*. Noua metodă constă în aplicarea MAPMP succesiv pe subdomeniile ale domeniului de definiție. Domeniile fiind astfel de lungime redusă, polinoamele de aproximare obținute conduc mai repede la erori mai bune (folosind grade polinomiale mai mici decât în cazul metodelor descrise în capitolele 2 și 3). Gradul polinomului de aproximare fiind mai mic și coeficienții calculați sunt mai puțini, astfel ca timpul necesar (resursele utilizate) calculelor este mai redus, utilitatea practică a metodei fiind una ridicată. Deoarece aproximările folosite în metodele descrise în Capitolele 2, 3 și 5 sunt de tip polinomial, ele conduc la erori bune (de ordin mic) doar în cazul în care domeniul de definiție al problemei este  $I = [a, b]$  de lungime destul de redusă.

Ca direcție de continuare a cercetării îmi propun ca în cazul aproximărilor polinoamiale în sensul celor mai mici pătrate, să abordez oportunitatea generării de soluții polinomiale de tip Chebyshev sau alte tipuri de polinoame cu convergența mai rapidă. În schimb, în situația în care domeniile tind la infinit sau dacă funcțiile căutate sunt periodice, aproximările cu funcții polinomiale nu ne vor conduce la rezultate satisfăcătoare. Astfel, îmi propun ca în viitor să încerc dezvoltarea unei metode a perturbațiilor omotopice în sensul celor mai mici pătrate pe subintervale, ca o îmbinare a metodelor MPOMP cu MAPMPS. În cazul unei astfel de metode forma soluției aproximative se va putea alege în concordanță cu cerințele problemei, putând vorbi de aproximări cu funcții exponențiale, trigonometrice etc.

Consider că teza de față constituie o bună premisă pentru incursiuni ulterioare în tematica obținerii de soluții analitice pentru ecuații cu derivate fracționare.



## Cuvinte cheie

ecuații cu derivate fracționare,  
derivata fracționară în sens Caputo,  
polinoame de aproximare,  
aproximare polinomială în sensul celor mai mici pătrate,  
soluții analitice aproximative

# Bibliografie

- [1] T.Abdeljawad et al., *Efficient sustainable algorithm for numerical solutions of systems of fractional order differential equations by Haar wavelet collocation method*, Alexandria Eng. J. **2020**, 2391-2400
- [2] NI.Acar, A.Dascioglu, *A projection method for linear FredholmVolterra integro-differential equations*, Journal of Taibah University for Science 13, **2019** , 644-650
- [3] GA.Adomian, *Review of the decomposition method in applied mathematics*. J. Math. Anal. Appl. **1998**, 135, 501–544
- [4] A.Akgul, M.Inc, E.Karatas and D.Baleanu, *Numerical solutions of fract. diff. equations of Lane-Emden type by an accurate technique*, Advan. Difference Equ., **2015**, 2015:220
- [5] T.Aleroev, S.Erokhin, E.Kekharsaeva , *Modeling of deformation-strength characteristics of polymer concrete using fractional calculus*, IOP Conf. Series: MSE 365 **2018**, 032004
- [6] B.Ali, RA.Naqvi, A.Haider, D.Hussain, S.Hussain, *Finite Element Study of MHD Impacts on the Rotating Flow of Casson Nanofluid with the Double Diffusion CattaneoChristov Heat Flux Model* , Mathematics **2020**, 8, 1555–1571
- [7] S.Alkan, K.Yildirim, A.Secer: *An efficient algorithm for solving fractional differential equations with boundary conditions*, De Gruyter, **2015**
- [8] A.Alshare, B.Tashtoush, HH.El-Khalil, *Computational Modeling of Non-Newtonian Blood Flow Through Stenosed Arteries in the Presence of Magnetic Field*, J. Biomech. Eng. **2013**, 135, 1145–1153
- [9] R.Amina, K.Shahb, M.Asifa, I.Khan, *Efficient numerical technique for solution of delay Volterra-Fredholm integral equations using Haar wavelet*, Heliyon 6, **2020**, e 05108
- [10] MH.Atabakzadeh, MH.Akrami, GH.Erjaee, *Chebyshev operational matrix method for solving multi-order fract. ordinary diff. equations*, Applied Mathematical Modelling 37, **2013**, 8903–8911
- [11] R.Bali, U.Awasthi, *Mathematical model of Blood Flow in Small Blood Vessel in the Presence of Magnetic Field*, Appl. Math. **2001**, 2, 264–269
- [12] B.Batiha, MSM.Noorani, I.Hashim, *Application of variational iteration method to a general Riccati equation*, Int. Math. Forum 2 (56) **2007**, 2759-2770

- [13] RL.Bagley, P.J.Torvik, *Fractional calculus - a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal 21, 5, **1983**, 741-748.
- [14] S.Behiry, S.Mohamed, *Solving high-order nonlinear Volterra-Fredholm integro-differential equations by differential transform method*, Natural Science 4, **2012**, 581-587
- [15] S.Berkani, F.Manseur, A.Maidi, *Optimal control based on the variational iteration method*, Computers and Mathematics with Applications **2012**, 64 604-610.
- [16] MM.Bhatti, A.Zeeshan, F.Bashir, SM.Sait, R.Ellahi, *Sinusoidal motion of small particles through a Darcy-Brinkman-Forchheimer microchannel filled with non-Newtonian fluid under electro-osmotic forces*, J. Taibah Univ. Sci. **2021**, 15, 514–529
- [17] AH.Bhrawy, E.Tohidic, F.Soleymanic, *A new Bernoulli matrix method for solving high-order linear and nonlinear Fredholm integro-differential equations with piecewise intervals*, Applied Mathematics and Computation 219 **2012**, 482-497
- [18] J.Biazar, R.Montazeri, *A computational method for solution on the prey and predator problem*, Appl Math Comp. **2005**;163(2), 841-847
- [19] C.Bota, B.Căruntu, D.Țucu, M.Lăpădat, M.S. Pașca: *A Least Squares Differential Quadrature Method for a Class of Nonlinear Partial Differential Equations of Fractional Order*, Mathematics **2020** , Volume 8, Issue 8, pag. 1336- 1348
- [20] C.Bota, B.Căruntu,M.S.Paşca, D.Țucu, M. Lăpădat: *Least Squares Differential Quadrature Method for the generalized Bagley-Torvik fractional differential equation*, Mathematical Problems in Engineering **2020**, Volume 2020, 7 pag
- [21] C.Bota, B.Căruntu, M.S.Paşca, M.Lăpădat: *Optimal control based on Polynomial Least Squares Method*, Mathematical Problems in Engineering **2018**, Volume 2018, 8 pag
- [22] C.Bota, B.Căruntu: *Analytical approximate solutions for quadratic Riccati differential equation of fractional order using the Polynomial Least Squares Method*, Chaos, Solitons and Fractals 102, **2017**
- [23] C.Bota, B.Caruntu, C.Lăzureanu: *The Least Squares Homotopy Perturbation Method for boundary value problems*, Appl. Comput. Math. **2017**, 16, 39-47
- [24] C.Bota, B.Căruntu, *Approximate analytical solutions of nonlinear differential equations using the Least Squares Homotopy Perturbation Method*, J. Math. Anal. Appl. **2017**, 448, 401–408
- [25] C.Bota, B.Căruntu: *Approximate Analytical Solutions of the Fractional-Order Brusselator System Using the Polynomial Least Squares Method*, Hindawi Publishing Corporation Advances in Mathematical Physics **2015**
- [26] C.Bota, B.Căruntu, O.Bundău: *Aplication of Hes Homotopy Perturbation Method for a Nonlinear Functional Equation in Banach Spaces*, AIP Conference Proceedings 1558, 1591, **2013**

- [27] C.Bota, B.Căruntu:  $\varepsilon$ -Approximate polynomial solutions for the multi-pantograph equation with variable coefficients, *Applied Mathematics and computation*, **2012**, 219 (4), 1785-1792
- [28] SC.Buranay, MA.zarslan, SS.Falahhesar, *Numerical Solution of the Fredholm and Volterra Integral Equations by Using Modified BernsteinKantorovich Operators*, *Mathematics* 9 **2021**, 1193-1206
- [29] B.Căruntu, MS.Paşca: *Approximate Solutions for a Class of Nonlinear Fredholm and Volterra Integro-Differential Equations Using the Polynomial Least Squares Method*, *Mathematics* (9/21) **2021**, 2692-2705
- [30] B.Căruntu, MS.Paşca: *The Polynomial Least Squares Method for nonlinear fractional Volterra and Fredholm integro-differential equations*, *Mathematics*, (9/18) **2021**, 2324- 2341
- [31] B.Căruntu, C.Bota, M.Lăpădat, MS.Paşca: *Polynomial Least Squares Method for Fractional Lane - Emden Equations*, *Symmetry* **2019**, Volume 11(4), 479-485
- [32] B.Căruntu, C.Bota, MS.Pasca, M.Lăpădat, *Approximate solutions for Riccati differential equation of fractional order using the Least Squares Differential Quadrature Method*, *Scientific Buletin of The Politehnica University of Timisoara*, Volume 64(78), Issue 2, **2019**, 18-28
- [33] B.Căruntu, C.Bota, O.Bundău, *Analytical simulation of magneto-hemodynamic flow in a semi-porous channel using the Polynomial Least Squares Method*. *ITM Web Conf.***2019**, 29, 1–13
- [34] B.Căruntu, C.Bota, MS. Paşca: *Approximate solutions for the magnetohydrodynamic ow of a non-Newtonian nanouid in a coaxial porous cylinder using the Least Squares Dierential Quadrature Method*, **2018** - The 15th International Conference on Mathematics and its Application, ISSN 1224 - 6069, 54-63
- [35] B.Căruntu, C.Bota, *Approximate polynomial solutions of the nonlinear LaneEmden type equations arising in astrophysics using the squared remainder minimization method*, **2013**, *Computer Physics Communications* 184, 1643-1648
- [36] B.Căruntu, C.Bota, *Approximate polynomial solutions for nonlinear heat transfer problems using the squared remainder minimization method*, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 39, **2012**
- [37] C.Cattani, *A review on Harmonic Wavelets and their Fractional Extension*, *Journal of Advanced Engineering and Computation*, vol. 2 (4), **2018**, 224-238
- [38] P.Das, S.Rana, *Theoretical prospects of fractional order weakly singular Volterra Integro differential equations and their approximations with convergence analysis*. *Math. Methods Appl. Sci.* **2021**, 44, 9419–9440
- [39] S.Davaeifar, J.Rashidinia, *Boubaker polynomials collocation approach for solving systems of nonlinear VolterraFredholm integral equations*, *Journal of Taibah University for Science*, 11, **2017**, 1182-1199

- [40] J.Davila, L.Dupaigne, J.Wei, *On the fractional Lane-Emden equation*, Trans. Amer. Math. Soc. 369, **2017**, 6087-6104
- [41] M.Deaghan, J.Manafian, A.Saadatmandi, *Solving Nonlinear Fractional Partial Differential Equations Using the Homotopy Analysis Method*, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 26(2), **2010**, 448-479
- [42] EH.Doha, AH.Bhrawy, SS.Ezz-Eldien, *Efficient Chebyshev spectral methods for solving multi-term fractional orders differential equations*, Applied Mathematical Modelling 35, **2011**, 5662-5672
- [43] J.Duan, L.Chen, *Solution of Fractional Differential Equation Systems and Computation of Matrix MittagLeffler Functions*, Symmetry 10, **2018**, 503-517
- [44] A.El-Mesiry, A.El-Sayed, H.El-Saka, *Numerical methods for multi-term fractional (arbitrary) orders differential equations*, Applied Mathematics and Computation, 160, **2005**, 683-699
- [45] R.Ellahi, A.Zeeshan, K.Vafai, HU.Rahman, *Series solutions for magnetohydrodynamic flow of non-Newtonian nanofluid and heat transfer in coaxial porous cylinder with slip conditions*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part N Journal of Nanoengineering and Nanosystems, **2011**, 225(3),123-132
- [46] R.Emden, *Anwendungen Der Mechanischen Warmentheorie Auf Kosmologische Und Meteorologische Probleme*, B.G.Teubner: Leipzig, Berlin, Ermany, **1997**
- [47] EA.Evans, R.Skalak, *Mechanics and Thermodynamics of Biomembranes*. in Elsevier Biomedical, L. Hue and G. van de Werve, New York; **1981**
- [48] M.Fazly, J.Wei, *On Finite Morse Index Solutions of Higher Order Fract. Lane-Emden Equations*, American J. Math., 139(2), **2017**, 433-460
- [49] DD.Ganji *Application of Homotopy Perturbation Method to Solve Linear and Non Linear Systems of Ordinary Differential Equations and Differential Equation of Order Three*, Journal of Applied Sciences 8 (7), **2008**, 1256-1261
- [50] M.Ghasemi, M.Tavassoli, E.Babolian, *Application of He's homotopy perturbation method to nonlinear integro-differential equations*, Applied Mathematics and Computation, 188, **2007**, 538-548
- [51] JH.He: *New Interpretation of Homotopy Perturbation Method*, International Journal of Modern Physics B Vol. 20, No. 18 **2006**
- [52] JH.He, *Application of homotopy perturbation method to nonlinear wave equations*. Chaos Solitons Fractals **2005**, 26, 695-700
- [53] JH.He, *Homotopy perturbation method a new nonlinear analytical technique*, Applied Mathematics and Computation 135, **2003**
- [54] JH.He, *A coupling method of homotopy technique and perturbation technique for nonlinear problems*, Int. J. Non-Linear Mech. 35 (1) **2000**, 37-43

- [55] JH.He, *Homotopy perturbation technique*. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. **1999**, *178*, 257–262
- [56] JH.He, *Variational iteration method, a kind of nonlinear analytical technique. Some examples*. ,Int. J. Non-Linear Mech. **1999**, *34*, 699–708
- [57] A.Hosry, R.Nakad, S.Bhalekar, *A Hybrid Function Approach to Solving a Class of Fredholm and Volterra Integro-Differential Equations*, Mathematical and Computational Applications,25,30, **2020**, 1-16
- [58] SM.Hosseini, S.Shahmorad, *Numerical piecewise approximate solution of Fredholm integro-differential equations by the Tau method*, Applied Mathematical Modelling, 29, **2005**, 1005-1021
- [59] SM.Hosseini, S.Shahmorad, *Tau numerical solution of Fredholm integro-differential equations with arbitrary polynomial bases*, Applied Mathematical Modelling, 27, **2003**, 145-154
- [60] C.Hunter, *Series solutions for polytropes and the isothermal sphere*, Mon. Not. R. Astron. Soc. 328, **2001**, *no.3*, 839-847
- [61] S.Islam, I.Aziz, AS.Al-Fhaid, *An improved method based on Haar wavelets for numerical solution of nonlinear integral and integro-differential equations of first and higher orders*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 260, **2014**, 449-469
- [62] MF.Karaaslan, F.Celiker, M.Kurulay, *Approximate solution of the Bagley-Torvik equation by hybridizable discontinuous Galerkin methods*, Applied Mathematics and Computation 285 **2016**, 51-58
- [63] A.Kazemi- Nasab, ZP.Atabakan, AI.Ismail, RW.Ibrahim, *A numerical method for solving singular fractional LaneEmden type equations*, Journal of King Saud University Science, **2018**, 120-130
- [64] AS.Khan, HY.Xu, W.Khan, *Magnetohydrodynamic Hybrid Nanofluid Flow Past an Exponentially Stretching Sheet with Slip Conditions*. Mathematics **2021**, *9*, 3291–3305
- [65] R.Kumar, R.Koundal, SA.Shehzad, *Modified homotopy perturbation approach for the system of fractional partial differential equations: A utility of fractional Wronskian*.Math. Methods Appl. Sci. **2022**, *45*, 809-826
- [66] R.Kumar, R.Koundal, SA.Shehzad, *Generalized least square homotopy perturbation solution of fractional telegraph equations*.Comput. Appl. Math. **2019**, *38*, 173-184
- [67] M.Lakestani, BN.Saray, M.Deaghan, *Numerical solution for the weakly singular Fredholm integro-differential equations using Legendre multiwavelets*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 235, **2011**, 3291-3303

- [68] JH.Lane, *On the theoretical Temperature of the Sun under the Hypothesis of Gaseous Mass Maintaining its Volume by Its Internal Heat and Depending on the Laws of Gases Known to Terrestrial Experiment*, American Journal Scientific Atrs, **1870**, 50, 57-70
- [69] M.Lăpădat, M.Razzaghi, MS.Paşca: *Numerical solution of the first order nonlinear differential equations with the mixed nonlinear conditions by using PLSM (comparison with Bernstein polynomials method)*, ITM Web of Conferences 29, 01014 **2019**, 7 pag
- [70] Y.Li, W.Zhao, *Haar wavelet operational matrix of fractional order integration and its applications in solving the fractional order differential equations*, Applied Mathematics and Computation 216, **2010**, 2276-2285
- [71] F.Mabood, AI.Ismail, I.Hashim, *Application of optimal homotopy asymptotic method for the approximate solution of Riccati equation*, Sains Malays. 42 (6) **2013**, 863-867
- [72] K.Maleknej, M.Attary, *An efficient numerical approximation for the linear class of Fredholm integro-differential equations based on Cattanis method*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 16, **2011**, 2672-2679
- [73] K.Maleknejad, Y.Mahmoudi, *Taylor polynomial solution of high-order nonlinear Volterra-Fredholm integro-differential equations*, Applied Mathematics and Computation, 145, **2003**, 641-653
- [74] V.Marinca, N.Herişanu, C.Bota, *An optimal homotopy asymptotic method applied to the steady flow of a fourth-grade fluid past a porous plate*. Appl. Math. Lett. **2009**, 22, 245–251
- [75] DA.Maturi, EAM.Simbawa, *The modified decomposition method for solving volterra fredholm integro-differential equations using maple*, International Journal of Geomate, 18, **2020**, 84-89
- [76] MS.Mechee, N.Senu, *Numerical Study of Fract. Diff. Equations of Lane-Emden Type by Method of Collocation*, Appl. Math., **2012**, no.3, 851-856.
- [77] KS.Mekheimer, *Peristaltic flow of blood under effect of a magnetic field in a non-uniform channels*. Appl. Math. Comput. **2004**, 153, 763–777
- [78] W.Ming, C.Huanga, *Collocation methods for Volterra functional integral equations with non-vanishing delays*, Applied Mathematics and Computation, 296, **2017**, 198 - 214
- [79] BM.Mirza, *Approximate analytical solutions of the Lane-Emden equation for a self-gravitating isothermal gas sphere*, Mon. Not. R. Astron. Soc. 395, **2009**, no.4, 2288 - 2291
- [80] S.Momani, Z.Odibat, *Homotopy perturbation method for nonlinear partial differential equations of fractional order*. Phys. Lett. A, 365, **2007**, 345–350
- [81] E.Momoniati, C.Harley, *An implicit series solution for a boundary value problem modelling a thermal explosion*, Math Comput Model. **2011**, 53, 249-260.

- [82] MI.Nouh, *Accelerated power series solution of polytropic and isothermal gas spheres*, New Astronomy 9, **2004**, no.6, 467–473
- [83] P.Natarajan, D.Lynden-Bell, *An analytic approximation to the isothermal sphere*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 286, Issue 2, **1997**, 268-270
- [84] Z.Odibat, S.Momani, *Modified homotopy perturbation method: Application to quadratic Riccati differential equation of fractional order*, Chaos Solitons Fractals 36 (1) **2008**, 167-174
- [85] Z.Odibat,S. Momani, *Numerical methods for nonlinear partial differential equations of fractional order*. Appl. Math. Model., 32, **2008**, 28–39
- [86] AB.Parsa, MM.Rashidi, OA.Beg, SM.Sardi, *Semi-computational simulation of magneto-hemodynamic flow in a semi-porous channel using optimal homotopy and differential transform methods*. Comput. Biol. Med. **2013**, 43, 1142–1153
- [87] M.S.Paşca, O. Bundău, A Juratoni, B. Căruntu: *The Least Squares Homotopy Perturbation Method for Systems of Differential Equations with Application to a Blood Flow Model* , Mathematics (10/2) **2022**, 546-560
- [88] MS.Paşca, B.Căruntu, A.Juratoni, O.Bundău , A. Albu: *Least Squares Differential Quadrature Method for Systems of Fractional Order Differential Equations*, The 9th IEEE International Conference on E-Health and Bioengineering -**2021**
- [89] MS.Paşca, M.Razzaghi, M.Lăpădat: *Approximate solutions for the Bagley-Torvik fractional equation with boundary conditions using the Polynomial Least Squares Method*, ITM Web of Conferences 29, 01011 **2019**, 8 pag
- [90] M.S.Paşca, M. Lăpădat: *Approximate solutions by the least squares differential quadrature method for nonlinear heat transfer problems*, Scientific Buletin of The Politehnica University of Timisoara, Mathematics and Physics, Volume 64(78), Issue 1, **2019**, 4-13
- [91] MS.Paşca, M.Lăpădat: *Optimal control problems based on Least Squares Differential Quadrature Method*, ICMA **2018**, The 15th International Conference on Mathematics and its Application, ISSN 1224 - 6069, 137-144.
- [92] JRC.Piqueira , VO.Araujo, *A modified epidemiological model for computer viruses*, Appl Math Comput.**2009**; 21, 355-360
- [93] I.Podlubny, *Fractional Diff. Equations*, Academic Press, San Diego, **1999**
- [94] M.Qayyum, I.Oscar, *Least Square Homotopy Perturbation Method for Ordinary Differential Equations*. J. Math. **2021**, 70, 59-94
- [95] JP.Quaile, EK.Levy, *Laminar flow in a porous tube with suction*. Int. J. Heat Mass Transf. **1975**, 97, 223–243
- [96] K.Rabiei, M. Razzaghi, *Fractional order Boubaker wavelets method for solving fractional Riccati differential equations*,Applied Numerical Mathematics 168, **2021**, 221-234



- [97] MS.Rawashdeh, H.Al-Jammal, *Numerical Solutions for Systems of Nonlinear Fractional Ordinary Differential Equations Using the FNDM*, *Mediterr. J. Math.*, **2016**, 358-369
- [98] L.Rahmani, M.Mordad, *Numerical solution of Volterra-Fredholm integro-differential equation by Block Pulse functions and operational matrices*, *General Mathematics Notes*, 4, **2011**, 37-48
- [99] A.Rehman, Z.Salleh, *Influence of Marangoni Convection on Magnetohydrodynamic Viscous Dissipation and Heat Transfer on Hybrid Nanofluids in a Rotating System among Two Surfaces*. *Mathematics* **2021**, 9, 2242–2257
- [100] S.Rostami, R.Ellahi, HF.Oztop, AS.Goldanlou, *A study on the effect of magnetic field and the sinusoidal boundary condition on free convective heat transfer of non-Newtonian power-law fluid in a square enclosure with two constant-temperature obstacles using lattice Boltzmann method*. *J. Therm. Anal. Calorim.* **2021**, 144, 2557–2573
- [101] J.Ryu, X.Hu, SC.Shadden, *A Coupled Lumped-Parameter and Distributed Network Model for Cerebral Pulse-Wave Hemodynamics*. *J. Biomech. Eng.* **2015**, 137, 1–13
- [102] H.Saberi, S.Effati, A.Yildirim, *Solution of linear optimal control systems by differential transform method*, *Neural Comput and Applic* **2013**, 23, 1311-1317
- [103] M.Sabzevari, *A review on Numerical solution of nonlinear Volterra-Fredholm integral equations using hybrid of . . . [Alexandria Eng. J. 52, (2013), 551-555]*, *Alexandria Engineering Journal*, 58, **2019**, 1099-1102
- [104] U.Saeed, *Haar Adomian Method for the Solution of Fract. Nonlinear Lane-Emden Type Equations Arising in Astrophysics*, *Taiwanese Journal of Mathematics* Vol. 21, **2017**, 5, 1175–1192
- [105] MHA.Sathar, AFN.Rasedee, AA.Ahmedov, N.Bachok, *Numerical Solution of Nonlinear Fredholm and Volterra Integrals by Newton-Kantorovich and Haar Wavelets Methods*, *Symmetry*, 12 , 2034, **2020**, 1-13
- [106] X.Shang, D.Han, *Application of the variational iteration method for solving nth-order integro-differential equations*, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234, **2010**, 1442-1447
- [107] C.Shu, *Differential Quadrature and Its Application in Engineering*, Springer, ISBN 978-1-4471-1132-0, **2000**
- [108] H.Singh, HM. Srivastava, *Jacobi collocation method for the approximate solution of some fractional-order Riccati differential equations with variable coefficients*, *Physica A* 523, **2019**, 1130-1149
- [109] A.Sinha, *MHD flow and heat transfer of a third order fluid in a porous channel with stretching wall: Application to hemodynamics*. *Alexandria Engineering Journal.* **2015**, 54, 1243–1252

- [110] FM.Skalak, CY. Wang, *On the non-unique solutions of laminar flow through a porous tube or channel*. SIAM J. Appl. Math. **1978**, 34, 535–544
- [111] D.Srinivasacharya, GM. Rao, *Mathematical model for blood flow through a bifurcated artery using couple stress fluid*. Math. Biosci. **2016**, 278, 37–47
- [112] VP.Srivastava, *A Theoretical Model for Blood Flow in Small Vessels*. Int. J. Appl. Appl. Math. **2007**, 2, 51–65
- [113] H.Thabet, S.Kendre, *Modified least squares homotopy perturbation method for solving fractional partial differential equations*. Malaya J. Mat. **2018**, 6, 420–427
- [114] TS.Tenforde, *Magnetically induced electric fields and currents in the circulatory system*. Prog. Biophys. Mol. Biol. **2005**, 87, 279–288
- [115] P.J.Torvik, RL.Bagley, *On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials*, Journal of Applied Mechanics, 51, **1984**, 294-298.
- [116] AM.Vargas, *Finite difference method for solving fractional differential equations at irregular meshes* Math. and Comp. in Simulation, **2022**, 193, 204-216
- [117] K.Wang, Q.Wang, *Taylor collocation method and convergence analysis for the Volterra-Fredholm integral equations*, Journal of Computational and Applied Mathematics , 260, **2014**, 294-300
- [118] CY.Wang, JB.Bassingthwaighte, *Blood Flow in Small Curved Tubes*. Journal Biomech. Eng. **2003**, 125, 910–913
- [119] HC.Weng, *Hydrodynamic Modeling of Targeted Magnetic-Particle Delivery in a Blood Vessel*. Journal. Biomech. Eng. **2013**, 135, 1–5
- [120] T.Yamamoto, Y.Nagayama, M.Tamura, *A blood-oxygenation-dependent increase in blood viscosity due to a static magnetic field*. Phys. Med. Biol. **2004**, 49, 3267–3267
- [121] S.Yuzbaşı, M.Sezer, B.Kemanci, *Numerical solutions of integro-differential equations and application of a population model with an improved Legendre method*, Applied Mathematical Modelling, 37, **2013**, 2086-2101
- [122] S.Yuzbasi, *A numerical approach for solving a class of the nonlinear Lane-Emden type equations arising in astrophysics*, Math. Method. Appl. Sci., 34(18), **2011**, 2218-2230
- [123] WK.Zahra, SM.Elkholy: *Cubic Spline solution of fractional Bagley-Torvik Equation*, Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 1(2) **2013**, 230-241
- [124] A.Zaman, N.Ali, M.Sajid, *Numerical simulation of pulsatile flow of blood in a porous-saturated overlapping stenosed artery*, Math. Comput. Simul. **2017**, 134, 1–16
- [125] J.Zhang, Z.Wei, L.Li, C.Zhou, *Least-Squares Residual Power Series Method for the Time-Fractional Differential Equations*. Complexity, **2019**.